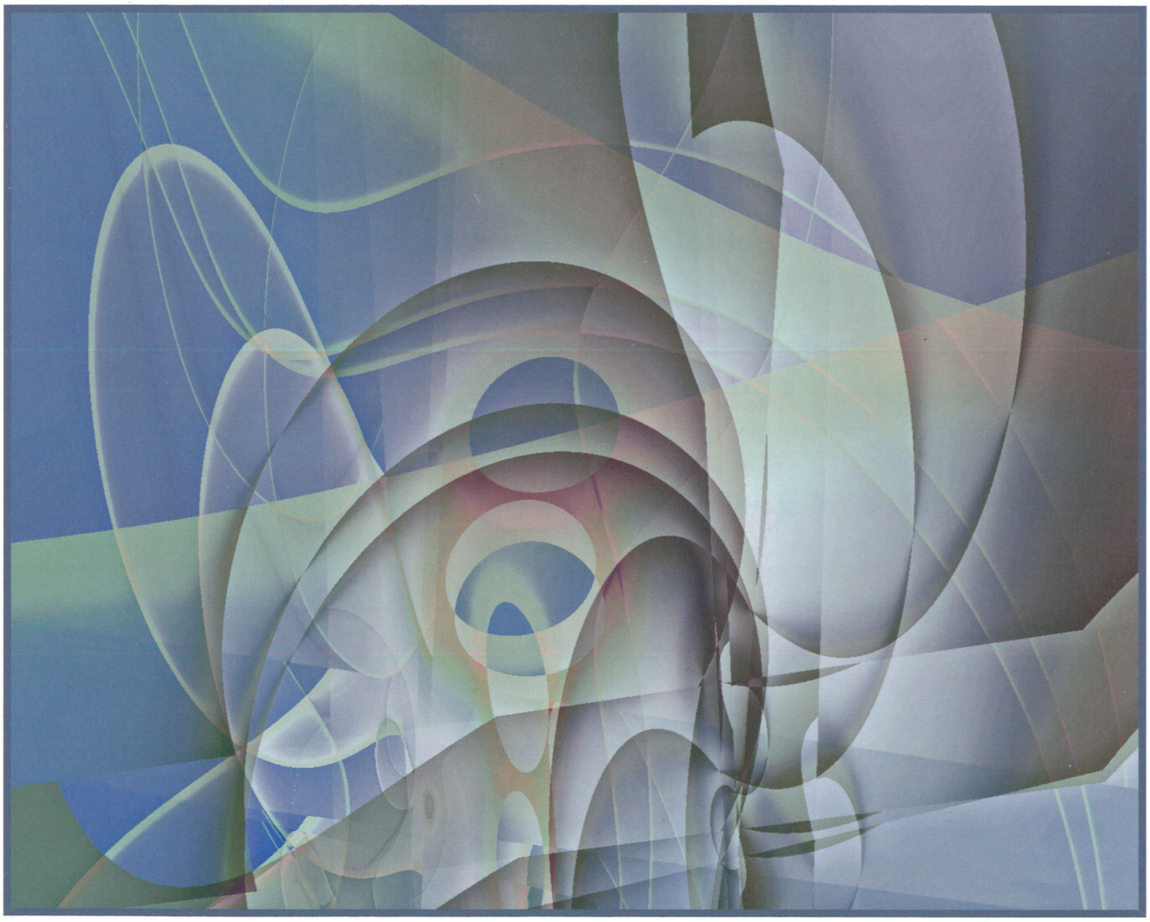
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年10月1日発行　第51巻10号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

10
2013

特集
分類する《数理科学》
なぜ分けて考えるのか



No.604
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 604 October 2013

分類する《数理科学》

なぜ分けて考えるのか

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2010 年/5 省略
2010 年/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12 〈振動する〉物理
2013 年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア

数理科学臨時別冊一覧

12 年/7 弦の場の理論
12 年/9 超弦理論の応用
12 年/10 複素多様体論講義
12 年/11 幾何学の量子化
12 年/12 量子力学から超対称性へ
13 年/1 行列解析ノート
13 年/4 無限量子系の物理と数理
13 年/7 現代宇宙論講義
13 年/8 クォーク・ハドロン物理学入門
13 年/9 統計力学から理解する 超伝導理論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

October 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 604

特集／分類する《数理科学》

分類分けという発想

河東 泰之

科学者はしばしば分類することが好きである．近代科学は分類することから始まったと言ってもよいようなものだ．もちろん数学者も分類が好きな人が少なくない．そもそも，数学，物理，化学，…なども近代になって分類されてできたものである（もともとは哲学も一緒であった）．そして数学の中でも，代数，幾何，解析といった分野に分類され，それぞれの中でも細かく○○理論のように分かれていく．本来数学（と理論物理の数学的な部分）は一体のものであり，人工的に分類してもかえって不自然になることも少なくないが，様々な都合によって分類されてしまうことが多い．私の専門の作用素環論も通常は解析に分類されており，実際に講義で教えるような内容とのつながりで言えば，ルベーグ積分，フーリエ変換，関数解析といったものから自然に続いている．私も講義を担当するときはこういった科目を教えることが多いが，実際の研究では，有限群論も代数幾何学も3次元トポロジーも表現論も確率論もみな関係しており，「解析学」の枠に閉じ込めてしまうことにはあまり意味がなく，かえって有害でさえある．

またその数学の○○理論の中でも分類理論が大きな地位を占めていることが少なくない．こちらは数学的な動機に基づいているので分類しようとするのは何ら不自然なことではない．よくあるのは，ある数学的な対象（例えばリー群）について，○○型などと名付けていくつかのクラスに分ける，あるいは「○○の性質をもつもの」と言って特定のクラスを取り出して研究するというものである．さらに順番に名づけて，I型，II型，…と分けていくこともよくある．これらはある程度粗い分類であることが普通で，例えばII型の○○はとてもたくさんあって，さらにその中でまた分類したりするわけである．

もっと望ましいとされているのは，何らかの数学的対象（例えば多様体）に対して，何かもっと簡単な量（例えばアーベル群）を対応させてそれによって，（ある自然な基準で）分類できる，といった理論である．このように対応させる量を不変量と言うが，それによって完全な分類が可能であるとき，完全不変量と言い，しばしば高く評価される．つまりある数学的対象が「同じ」であるかどうかを判定するには完全不変量を計算してそれが「同じ」であるかどうかで決めればよい，という場合である．対象となる範囲が広いほど，また不変量が簡単であるほど高く評価されることが多い．

しかし完全不変量であっても，あまりに計算しにくかったり，不変量自体が複雑で同じかどうかの判定が難しかったりすると，分類定理とはあまり言いにくくなってくる．例えば私の専門の作用素環論で言えば，可換 C^* 環は，そのスペクトルと呼ばれる完全不変量（コンパクト・ハウスドルフ空間）によって分類されるが，コンパクト・ハウスドルフ空間が同じ（同相）であるかどうかを

判定するのは困難なので，通常はこれは分類定理とはみなされていない．

一方単射的因子環という作用素環は（トリビアルなものを除き）ウェイトのフローというコンヌ・竹崎の不変量によって完全に分類される．この不変量はエルゴード・フローなので全然簡単な数学的対象ではないし分類しやすくもないのだが，通常この結果は分類定理とみなされている．

さらに進むと，完全不変量があることを証明することでは満足せず，対象を完全に列挙しようということを考えることがある．例えば有限単純群の分類というのは完全なリストが完成していてこれで全部だ，というのが中心結果である．誰しも思いつきやすいものでリストが尽くされていたとしたら何だか面白みが乏しいが，有限単純群の場合は26個の例外があり，しかもそれで全部だ，というのが興味深いところである．しかもその中で一番サイズが大きいものがモンスター，すなわち怪物という固有名詞がついているものであり，とうてい関係あるとは思えないような他の数学分野と深遠な形でこれが結びついているというのが松本氏の記事でも触れられているムーンシャイン予想である（すでにボーチャーズによって解決済みなのでもう予想ではないが）．私は自分がやっている数学がこういうことと関係しているとは昔は全く考えてもいなかったが，最近はいろいろな関係があることがわかり，前は全く話が通じないと思っていた数学者，物理学者たちと話が通じることがあるようになったのがうれしい．

完全分類理論，特にリストを列挙した結果というのは偉大な成果であることは間違いないのだが，そこで終わってしまうと，もう先はありませんよ，と言っているようでさびしいところもある．しかし完全に分類しようとする努力の中で，何か全く新しいものに遭遇し，そこから新しい数学が発展していくと言うことが時々あり，そちらのほうが面白い展開のように感じる．

私が前に研究していた（そして今でも少しはしている）部分因子環論では，完全分類を目指す努力の過程で，これまで誰も見たことのなかった数学的構造の例が現れた．量子群や共形場理論ときちんと対応がつく部分因子環はたくさん知られており，また，よく研究もされており，大変重要な例であることは間違いないのだが，全くそういうものとはかけ離れたように見える例が散発的に見つかっているのである．これらは今のところ他の数学とは離れた特殊な構造ということになっているのだが，本当は深い関係があることは間違いないと思われる．例えば，これらの例は3次元閉多様体の複素数値不変量を生み出すが，それらにどのような幾何学的意味があるのか全く分かっていない．またこれらに対応する共形場理論が存在すると私は強く信じているがそのようなことは全く証明されておらず，ごく部分的な兆候のかけらが知られているだけである．部分因子環論を創始したジョーンズはそもそも分類を目指していたわけではないと思うが，結果的に様々な分類定理を経由して意外な構造の発見につながったのである．ジョーンズ本人ももともと結び目理論との，極めて予想外の新しい関係をジョーンズ多項式の発見によってもたらしたのであった．

分類理論はしばしば当然目指すべきものとされ，なぜ分類したいかは問われないことが多い．しかしどちらかというと，分類理論は分類しようとする努力によって生み出された手法，その経過で発見された新しい例や現象のほうが長期的に見れば数学の発展にとって有意義なように思われる．例えばポアンカレ予想は，これこれの条件を満たすものは球面しかありませんよ，と言っているのだから，何も新しいものはないという種類の結果である．だから結果自体は（明らかに重要だが）面白みに欠けるという言い方もできる．しかし，解決の過程で考え出された様々な新しい手法が今後長い間数学の発展を支えていくのであろう．

分類理論ではどんどん話が細かくなっていくことがよくあるのだが，一方ではそういう努力の結果として「数学は一つにつながっている」という実感が得られることが（時々でも）あるのが数学研究のすばらしい点であると思う．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

代数学における分類

群とその表現を中心として



松本 久義

本稿では代数学の一分野である群論や表現論における分類について紹介したい．なお以下において，関数空間を考えるとき本当は適切なカテゴリーを指定すべきなのをごまかしていたり，リー代数の係数体が複素数体であるのか実数体であるのかなど，各所で雑なあるいは不正確な書き方をしてごまかしているところがあるのをおことわりしておく．

1. 対称性と群

群というものは，対称性を記述する代数的構造である．そもそも「対称性」という概念自体は漠然としたもので数学的な厳密に規定された概念とは言い難い．そこで「対称性」というものを数学的に捉えるために具体的な図形「正方形」と「一般的な長方形」を考察してみる．

長方形のほうは対称軸が縦横 2 本しかないが，正方形はそれに加えて対角線 2 本の計 4 本がある．これらの対称軸で折り返す操作を鏡映変換と言う．また長方形は 180 度回転で不変であるが，正方形はそれに加えて 90 度や 270 度回転で不変である．これらの鏡映変換や回転など図形の形を変えない変換を合同変換と言う．そこである図形を不変にするような合同変換全体のなす集合を合同変換群と言う．ここで何もしないという恒等変換も一つの合同変換としておく．すると長方形の合同変換群は 4 個の元を，正方形の合同変換群は 8 個の元を持っている．図形の対称性が高いということは合同変換群が大きいということであると解釈でき，正方形のほうが一般的な長方形よりも対称性が高いということを数学的に表現することができる．ここで重要なのは，合同変換群は単なる集合ではなく写像としての合成を演算として持つ「群」と見なせるということである．一般的な群というものは与えられた集合の上に結合則を満たす乗法という演算が定義され，単位元および任意の元の逆元が存在するというものである．合同変換群では恒等写像が単位元，逆写像が逆元にあたっている．

図形同様にそれ以外の数学的対象についても対称性が考えられる．現代数学の立場では数学的対象はある集合（台集合と言われる）とその上の構造の組合せということで記述される．例えば，群，ベクトル空間，位相空間などは数学的構造の例である．図形における合同変換にあたるものは台集合から自分自身への全単射であってその数学的構造を保つものであり，その数学的構造の自己同型写像と言われる．自己同型写像全体はやはり写像の合成を乗法として群をなし，その数学的構造の**自己同型群**と言われる．

もっとも簡単な数学的構造と言えば，有限集合であろう．その上に何も構造を付加しない n 個の元を持つ有限集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ の自己同型群は n 次**対称群** $\mathfrak{S}_n$ である．有限集合はどこにでも出てくるので行列式の定義など対称群も多くの場所に顔を出す重要な群である．対称群は有限個の元か

らなる群でこのような群は**有限群**と言われる．

差積 $\Delta(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)$ を考えたとき $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して σ の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)=\Delta(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})/\Delta(x_1,\ldots,x_n)$ で定める．符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は 1 か -1 かのどちらかになるが，1 になるとき σ を偶置換と言い，-1 になるとき奇置換と言うのであった．n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ に含まれる偶置換全体はやはり群をなし，それは n 次**交代群**と言われここでは $\mathfrak{A}_n$ と書くことにする．

他に重要な群の構成法として，線形代数がらみで出てくる線形群という群のカテゴリーがある．基本的なのは V を複素数体や実数体上のベクトル空間としたときの自己同型群 $GL(V)$ でありこれは**一般線形群**と言われる．$GL(V)$ の元は V から自分自身の上への全単射になっている線形写像であり，ポイントは逆写像も線形写像となり $GL(V)$ の元になることである．V を複素ベクトル空間としよう．V の次元が n であるとき基底を一つ定めることにより V と n 次元複素縦ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ と同一視できる．すると線形写像の行列表示を用いて $GL(V)$ は逆行列を持つ $n\times n$ 複素行列のなす群である n 次複素一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$ と同一視される．同様に逆行列を持つ $n\times n$ 実行列のなす群を n 次実一般線形群 $GL(n,\mathbb{R})$ という．一般線形群の部分群としていくつかの重要な部分群が得られる．まず n 次複素（実）特殊線形群を行列式が 1 であるような $n\times n$ 複素（実）行列のなす群として定める．

$$SL(n,\mathbb{C})=\{g\in GL(n,\mathbb{C})\mid \det(g)=1\},$$
$$SL(n,\mathbb{R})=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\mid \det(g)=1\}.$$

n 次元実縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に標準内積

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$$

を導入した内積空間の自己同型群を n 次**直交群**と言い $O(n)$ で表す．行列で考えれば $O(n)$ は $n\times n$ 直交行列のなす群である．

$$O(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\mid {}^tgg=I_n\}.$$

ここで ${}^tg$ は g の転置行列，I_n は $n\times n$ 単位行列を表す．

n 次元複素縦ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ に標準エルミット内積

$$\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y_i}$$

を導入したエルミット計量空間の自己同型群を n 次**ユニタリ**群と言い $U(n)$ で表す．行列で考えれば $U(n)$ は $n\times n$ ユニタリ行列のなす群である．**特殊直交群**と**特殊ユニタリ群**は行列式が 1 であるような直交行列やユニタリ行列のなす群である．

$$SO(n)=O(n)\cap SL(n,\mathbb{R}),$$
$$SU(n)=U(n)\cap SL(n,\mathbb{C}).$$

ここで出てきた線形群であるが，いずれも $n\times n$ 行列のなすベクトル空間の部分集合である．しかも単なる部分集合ではなくて C^∞-**多様体**（以下単に多様体と書く）になっているのである．多様体は基本的な数学的な概念の一つで各点のまわりでユークリッド空間の開集合と同一視できるような局所座標近傍がとることができることが保証され，さらにそれらの局所座標系どうしの変換関数が無限回微分可能であるようなハウスドルフ位相空間である．例えば n 次元球面などは n 次元多様体の例である．このように多様体は幾つかのベクトル空間の開集合を無限回微分可能写像で貼り合わせたものと言える．上の例だと，2 次の特殊直交群は 2×2 回転行列全体であり 1 次元球面であるところの円に群構造を入れたものになっている．また 2 次の特殊ユニタリ群 $SU(2)$ は 3 次元球面に群構造を入れたものである．

さらに重要な点はこれらの線形群の乗法や逆元と取る操作はすべて（局所座標で表示した場合）無

限回微分可能であることである．このように多様体の構造をもち乗法や逆元を取る操作が無限回微分可能になるような群を**リー群**と言う．リー群は連続的な対称性を表すものと考えられ，20世紀になり現代物理学が大きく進展するにつれ，理論を記述する基本的な言語の一つとして注目され大きく理論が進展した．例えば物理理論における「対称性の破れ」のような概念は具体的にはリー群の言葉で記述されるものである．

連結成分の話は「連続的な対称性」とは別の話になるのでここでは連結リー群のみを考えることにしよう．リー群の定義からでは局所的に座標系の存在は保証されるが，そのようなものは構成しようとしても大抵人為的な不自然なものであり，そのようなものの存在を用いて一般論をある程度展開するのには役に立つ．しかし，具体的にリー群を詳しく調べるのは難しい．リー群の名称の元になった理論の創始者であるリーのアイデアは1次近似を行ってリー代数という非結合的な代数の話にリー群の話を帰着させるという画期的なものであった．具体的には与えられたリー群上の左からの群の元の積による作用で不変なベクトル場全体のなす実線形空間に交換子で積構造を入れたものを考えるのである．このリー代数は少なくともリー群の局所的な情報はすべて保持している．したがって離散群で割るといった大域的な情報を除けば，リー代数はリー群を決定すると言ってよい．例えば $GL(n,\mathbb{C})$ のリー代数は $n\times n$ 複素行列の全体の空間に交換子 $[X,Y]=XY-YX$ でリー代数の積構造を定めたものになってこれは一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ と言われる．

2. コンパクト単純リー群の分類

連結なコンパクトリー群はいくつかの（非自明な閉正規部分群を持たないという意味で）単純なコンパクトリー群といくつかの $SO(2)$ の直積群の被覆群となる．つまり単純コンパクトリー群が分類できれば一般のコンパクトリー群はわかると言ってよい．例えば上に挙げた線形群の例の中では3次以上の特殊直交群 $SO(n)$ および2次以上の特殊ユニタリ群 $SU(n)$ を適当な可換有限群で割ったものがコンパクト単純リー群の例になっている．

単純コンパクトリー群のリー代数は実数体上のリー代数であるが，それを複素化すると複素単純リー代数というクラスのリー代数が得られる．実はこの対応で単純コンパクトリー群と複素単純リー代数は同型を除いて一対一対応することがわかる．したがって単純なコンパクトリー群の分類というそのままではどうやっていいのかわからないような問題が，複素単純リー代数の分類の問題に帰着されるのである．例えば n 次特殊ユニタリ群 $SU(n)$ のリー代数を複素化して得られるものは n 次複素特殊線形リー代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\mid \mathrm{tr}X=0\}$ である．ここで $\mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_n)$ で対角成分が左上から $x_1,\ldots,x_n$ となる $n\times n$ 対角行列を表そう．また $X\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ に対して $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 上の線形作用素 $\mathrm{ad}(X)$ を $\mathrm{ad}(X)Y=XY-YX$ $(Y\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}))$ で定める．$E_{i,j}$ で i,j 成分が1でほかの成分が0であるような $n\times n$ 行列を表すとすると

$$\mathrm{ad}(\mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_n))(E_{i,j})=(x_i-x_j)E_{i,j}$$

が成り立つ．つまり行列要素は，対角行列との交換子をとる作用素による同時固有ベクトルなのである．これは $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の持つ重要な内的構造であり応用上も重要である．キリングは一般の複素単純リー代数に対して，対角行列の対応物，およびそれらと交換子を取る作用素についての同時固有空間分解という $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ と類似の構造を見出した．これはルート空間分解と言われる．また同時固有値を与える，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の場合には $\mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_n)\rightsquigarrow x_i-x_j$ という対角行列上の線形汎関数はルートと言われる．このルート全体のなす集合（ルート系と言われる）は対角行列の双対空間の中の有限個の元からなる集合であり，もともとの単純リー代数よりははるかにわかりやすい対象と言える．エリー・カルタンはキリングのアイデアを完成させルート系によって単純リー代

数が特徴づけられることを示しそれによって複素単純リー代数したがってコンパクト単純リー群の分類を得た．それはコンパクト単純リー群は A_n 型，B_n 型，C_n 型，D_n 型という 4 種類の古典型と言われる無限系列と E_6 型，E_7 型，E_8 型，F_4 型，G_2 型の 5 個の例外型と言われるものしか同型を除いて存在しない．ディンキンはルート系をグラフによって記述するアイデアを見出しそれによってカルタンの分類を視覚的に俯瞰することができる．これをディンキン図形と言う．

A_n　○ − ○ − ⋯ − ○ − ○

B_n　○ − ○ − ⋯ − ○ ⇒ ○

C_n　○ − ○ − ⋯ − ○ ⇐ ○

D_n　○ − ⋯ − ○ − ○ − ○
　　　　　　　　　　　|
　　　　　　　　　　　○

E_6　○ − ○ − ○ − ○ − ○
　　　　　　　　|
　　　　　　　　○

E_7　○ − ○ − ○ − ○ − ○　− ○
　　　　　　　　|
　　　　　　　　○

E_8　○ − ○ − ○ − ○ − ○　− ○ − ○
　　　　　　　　|
　　　　　　　　○

F_4　○ − ○ ⇒ ○ − ○

G_2　○ ⇛ ○

さて，この中で A_n 型は $n+1$ 次特殊ユニタリ群 $SU(n+1)$（の有限群による商）であり B_n 型は $2n+1$ 次特殊直交群 $SO(2n+1)$，D_n 型は $2n$ 次特殊直交群 $SO(2n)$ である．C_n 型は上では述べなかったが，ユニタリシンプレクティック群という線形群になる．また 5 個の例外型の群であるがこれらも一応線形群の範疇に含められるものである．

コンパクトでないようなリー群については状況は幾分複雑になる．それでも単純群の分類は知られているし，一般のリー群が単純群のほぼ直積になるわけではないが，単純群のほぼ直積でかける群と可換群を組み合わせてできた可解群のほぼ半直積で表せる．

結論としてはコンパクト単純リー群は 5 個の例外を除いては 4 系列しかなくそれらはいずれもよく知られた線形群なのであった．このことを人によっては面白みのないことのように感じるかもしれない．でも考えてもみよう．分類できたとしても何百個とか非常に多くの多様性があるとしたらどうだろうか？ そのほうが面白いかもしれないが実際に具体的な対称性を分析するときにより多くの可能性を考えなければならないのである．物理理論を組み立てたりする場合も対称性がこれしかないということから理論の可能性に強い制限がかかって限られた場合を検討すればいいのが，そうでなくなるのである．もっとひどく理解できないほどあって分類ができないとかだとどうだろう．それだとリー群論を通して連続的な対称性を理解するという方法論が機能しないということになりかねない．コンパクトリー群がらみの対称性には線形代数という強力なツールによってよく理解できる少数のものしかないということが，リー群論が成功を収めた大きな理由である．

3. 有限単純群の分類

リー群の場合は基本的な構成要素である単純群（と可換群）の組合せとしてほぼ一般の群が表せたわけであるが，一般の群についてはそうはならない．そのようなことが期待されるのは何らかの意味での強い有限性が課せられた場合である．例えば有限群であれば直積のように簡単ではないが，ともかく一般の群は有限単純群を組み合わせたものになっている．有限群のほうが連結コンパクトリー群よりも簡単なようにも思えるが実はそうではなく有限単純群の分類が完成したのは 1980 年ごろであり証明がすべて出版されたのは最近である．その証明も全部で 5000 ページと言われ多くの研究者の仕事の集積としてなされた容易でないもの

である．以下分類の結果を簡単に紹介しよう．可換な単純群は素数位数の巡回群である．非可換な単純群として有名なのは５次以上の交代群 $\mathfrak{A}_n$ である．有名な事実であるが，このことは群論を創始したガロアが５次以上の代数方程式にはいわゆる根の公式が存在しないことのガロア理論を用いた証明で重要な役割を果たしている．それ以外の例はコンパクト単純群と同じように線形代数を用いて構成されるものである．ただし有限単純群を構成するためには複素数体や実数体ではなく元の個数が有限個である有限体上のベクトル空間を考える必要がある．このようにしてほとんどの有限単純群が構成される．キリング・カルタンによる複素単純リー代数に対応する系列およびそれらを自己同型で捻ったようなものの系列がある．有限体をいろいろ取り替えられるので例外型リー代数に対応するものも無限系列になる．これらは**リー型の単純群**と言われる．このようなもの以外では 19 世紀にすでにマシューが５個の有限単純群を見つけていた．交代群やリー型の群が無限系列をなすのに対してこれはそうではない．その後 20 世紀後半になって有限単純群の分類が模索される過程で同様に孤立して現れる有限単純群がさらに 21 個発見された．これら 26 個の群は**散在型単純群**と言われる．有限単純群は以上で尽きているというのが分類定理である．

この分類の結果は思わぬ副産物をもたらした．散在型有限単純群のうちで元の個数が最も大きいものは**モンスター**という名前がついている．ちなみにその元の個数は約 8×10^{53} 個で素因数分解した形で書くと

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

となる．実は 1970 年代後半にこのモンスターの既約表現の次元が J-不変量といわれる保形関数のフーリエ係数の間に関連があるらしいということが見出された．これらは全く別の文脈で出てくるものである．このような現象はムーンシャインと呼ばれる．その後数理物理学の研究の過程で現れ

た概念である**頂点作用素代数**を用いて，ムーンシャインは解明されることになった．

4. 群の表現

群 G の**表現**とはあるベクトル空間 V と群の準同型 $\pi: G \to GL(V)$ の組 (π, V) である（リー群を考えるときは π に適当な連続性を要求する）．

準同型とは群の間の写像であって乗法を保つ（結果として単位元や逆元も保つ）ものであり群論における基本概念である．しかし表現のほうは初めて目にされる人は何でこのようなものが重要なのかわかりにくいであろう．一般線形群の元は行列で書けることを踏まえて，表現の意義について時々目にする説明として「群を行列を用いてわかりやすく表現する」というものがある．しかし，例えば $SU(2)$ の3次元より大きな空間上の表現を考えたりする．2×2 行列で書けるものをそれよりサイズの大きな行列でわかりにくく表示しているのにである．表現を考える意義をあらためて考えてみよう．例えば正方形の例を取ってみると正方形の対称性は8個の元からなる合同変換群で記述されるが，群のほうは対称性そのものを表すもので，実際には群だけでなく正方形などの数学的構造にどのような変換として群の元が作用するか理解しないといけない．そういったことをそのままの形で理解できるとよいが実際には困難なことが多いし，分析するとしても話がそれ以上進まなかったりする．そこでその数学的構造の何らかの情報を反映したベクトル空間を考え，もともとの数学的構造の対称性として現れる群の作用から自然にベクトル空間に引き起こされる作用を分析する．これが群の表現を与える．例えば多様体に対してはその上の何らかのよい性質をもった関数のなす空間とか体を係数とするコホモロジー群などを対応させることができる．

表現の中でも重要なクラスは群の作用で保たれるような部分空間が全体と $\{0\}$ 以外に存在しないようなものである．このような表現を既約表現という．これは群における単純群のような位置にある基本的な表現の構成要素となるようなものと考えられる．実際，有限群やコンパクトリー群の表現は既約表現の直和に分解されると言う著しい結果が知られている．そのようなことを踏まえて数学的構造の対称性を分析するツールとして表現に対して何をしておけばよいか整理すると

(1) 既約表現の分類を行う．
(2) 分類されたそれぞれの既約表現をよく理解する．
(3) 与えられた表現を既約表現の直和として具体的に分解する．

というようになる．

例えば回転行列のなす群である2次特殊直交群 $SO(2)$ が単位円に回転として作用している状況を考えよう．ここで考えるベクトル空間としては円上定義された関数のなすベクトル空間を考えよう．まず (1), (2) の部分はこうなる．$SO(2)$ の既約表現はすべて1次元であり整数と1対1に対応する．具体的に $n \in \mathbb{Z}$ に対応する表現は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{in\theta}$$

で与えられる．円周上の関数は周期 2π の実数上の関数に他ならないので，実は (3) はフーリエ級数の理論に他ならないことになる．

このような表現論を用いた対称性の分析は大きな成功を収め，表現論が一つの大きな数学の分野に成長するに至っている．既約表現の分類は表現論の中でも基本的な問題であることがわかるであろう．

それ以外にもコンパクトリー群や対称群，有限単純群など上で述べてきた重要な群について既約表現は分類も含めて詳細に調べられている．とくに広いクラスである実簡約群の既約表現の分類について簡単に触れる．例えば $GL(n, \mathbb{R})$ などは実簡約群の典型的な例だがこのようなコンパクトでない群は無限次元ベクトル空間上の表現を考える必要がありコンパクト群の表現論よりも話がデリケートになる．現在既約表現の分類は次の3種類

が知られている．

(1) ベクトル空間の適当な意味での基底を考え表現を無限サイズの行列で表示することを考える．このとき行列の各成分はその群上の関数になるがそれを群の元を無限大に飛ばしたときの漸近挙動を用いて既約表現を分類することができる．これはラングランズによる解析的な手法による分類である．

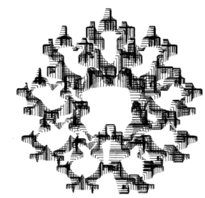
(2) 表現の適当な稠密部分空間を取り出しリー代数の無限次元表現（ハリッシュ・チャンドラ加群と言われる）の話に帰着することができる．ボーガンはこのハリッシュ・チャンドラ加群の代数的な構造を詳細に調べることで既約表現の分類を与えた．これは代数的な手法による分類である．

(3) 上述のハリッシュ・チャンドラ加群であるが，ベイリンソンとベルンシュタインは旗多様体上の確定特異点型ホロノミック系という微分方程式系が対応することを見出した．このようなものは柏原ら佐藤学派によって深く調べられていたものであり，既約表現は結局は旗多様体上の極大コンパクト部分群の複素化による軌道を用いて分類できることがわかる．これは幾何的な分類と言える．

上記の3つの分類は全く異なる原理でなされたものだが，実は本質的には同じでありそれぞれの関係も理解されている．このことをみても表現論が様々な数学の分野が交錯するところであることがわかるであろう．最後にラングランズが上述の分類を考えた動機は類体論の非可換化にあることを指摘しておく．対称性の研究の奥深いところは数論と深くつながっているのである．

（まつもと・ひさよし，東京大学大学院数理科学研究科）

幾何学における分類



橋本 義武

1. 合同による分類から対称性の分類へ

幾何学には長い歴史があるので，図形の分類について述べた定理も古くからある．最初に思いつくのが，プラトーン（紀元前4世紀）も言及している正多面体の分類である．

定理 正多面体は，正四面体・正六面体（立方体）・正八面体・正十二面体・正二十面体に限る．

古来，正多面体が興味を引く対象であるのは，その対称性の豊富さによる．その話に行く前に，平面図形の対称性について振り返っておこう．

平面図形では，

- 二等辺三角形＝線対称な三角形
- 平行四辺形＝点対称な四角形

であり，それぞれその対称性に由来する諸定理を有している．

一般の長方形と菱形は線対称の対称軸が2つある．長方形の辺の中点を結んでできる四角形は菱形であり，菱形の辺の中点を結んでできる四角形は長方形である．このことを，「長方形と菱形は互いに双対である」ということができる．双対性より，長方形と菱形が同一の対称性をもつことが従う．これに対して，二等辺三角形の辺の中点を結んでできる三角形は線対称だから二等辺三角形であり，平行四辺形の辺の中点を結んでできる四角形は点対称だから平行四辺形である．このことを「二等辺三角形や平行四辺形は自己双対性をもつ」ということができる．

図形 X を移動して（裏返しも可）図形 Y にぴったり重ねることができるとき，X と Y は合同であるという．図形の対称性，すなわち図形 X を移動して自分自身にぴったり重ねる移動があるとき，X を Y にぴったり重ねる移動が一つではなくなる．

合同なものどうしを同一視して図形を分類するのは基本的な分類問題である．これに対し，長方形と菱形のように，図形としては合同でなくても対称性が同一なものがある．そこで，図形を互いに合同かどうかで分類するのでなく，その対称性が同一かどうかで分類するという問題意識が出てくる．3次元結晶構造の対称性の分類はそのような問題であり，19世紀末に分類が完成した．これはもっとも鮮やかな自然科学への数学の貢献の一つである．

結晶構造の対称性の分類をずっと簡単にした問題として，円筒形の印（円筒印章）を転がしてできるような模様の対称性の分類がある．古代より，様々なる意匠においてこのような模様が用いられてきた．その対称性は以下の7種類に限られることが示される．

(1) ⋯ F F F F F ⋯

(2) ⋯ M M M M M ⋯

(3) ⋯ N N N N N ⋯

(4) ⋯ E E E E E ⋯

(5) $\cdots$ HHHHH $\cdots$

(6) $\cdots$ FĿFĿF $\cdots$

(7) $\cdots$ NИNИN $\cdots$

(6), (7) の，上下をひっくりかえしながら横に移動する対称性がおもしろい．分類をおこなうと，このようなちょっと見逃しやすい対象に出会うことがある．なお

$\cdots$ MWMWMW $\cdots$

は (7) と同じ対称性である．円筒印章は紀元前 4 千年紀に既に存在していたことが知られているという．

2. 群

図形の対称性を考える際の基本になるのが群の概念である．その定義は，『図形を自分自身にぴったり重ねる移動』のもつ基本的性質を列挙したものになっている．

定義　集合 G とその元 $e \in G$，および写像

$$m : G \times G \to G,\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2,$$
$$(\ )^{-1} : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

が与えられていて，次の条件をみたすとき，$(G, e, m, (\ )^{-1})$ を**群**という．

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.

2. $ge = g, \quad eg = g$.

3. $gg^{-1} = e, \quad g^{-1} g = e$.

普通は他のデータを略して群 G という．

「対称性が同一」ということを，「2 つの群が同型である」という言い方で正確に述べることができる．2 つの群が同型であるとは，それらの間の 1 対 1 対応で群の演算を保つものが存在することである．

群 G が有限集合であるとき，これを有限群といい，その元の個数を位数という．群 G の部分集合 H が e を含み，写像 $m, (\ )^{-1}$ によって H も群になるとき，H を G の部分群という．G の部分集合

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

を左剰余類といい，左剰余類全体の集合を G/H と書く．G/H が有限集合であるとき，その元の個数を部分群 H の指数という．

3. 正多面体の分類

正 n 角形は線対称の対称軸が n 個ある．2 つの対称軸に関する対称移動を合成すると，回転移動になる．正 n 角形は $2\pi k/n$ 回転 $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ の対称性をもつ．正 n 角形を自分自身にぴったり重ねる平面上の回転移動・線対称移動全体は群をなす．群の演算は移動の合成である．この群を位数 $2n$ の二面体群という．このうち平面上の回転移動からなる部分群を位数 n の巡回群という．

正 n 角形の辺の中点を結んでできる n 角形は正 n 角形になる．すなわち正 n 角形は自己双対性をもつ．

正四面体の面の中心を結んでできる多面体は正四面体である．すなわち正四面体は自己双対性をもつ．正六面体の面の中心を結んでできる多面体は正八面体であり，正八面体の面の中心を結んでできる多面体は正六面体である．したがって正六面体と正八面体は互いに双対であって同一の対称性をもつ．同様に，正十二面体と正二十面体は互いに双対であって同一の対称性をもつ．

正 N 面体 X の頂点は，中心からすべて等距離にある．この中心のまわりの回転移動によって，X を動かして再び自分自身にぴったり重ねることを考える．そのような回転移動全体の集合を正 N 面体群とよぶ．

正 N 面体群は 3 次回転群 $SO(3)$ の有限部分群である．$SO(3)$ は，実数を成分とする行列式 1 の 3 次直交行列全体の集合である．群の演算は行列の乗法である．

対称性の観点から次のように正多面体の分類定理を述べなおすことができる．

定理　群 $SO(3)$ の有限部分群は，巡回群・二面体群・正四面体群・正八面体群・正二十面体群に限る．

4. 群 $SU(2)$ の表現

複素ベクトル空間 V に対し，V から V への線型同型全体の集合を $GL(V)$ とする．群 G に対し，準同型 $\rho : G \to GL(V)$ を G の複素表現という．部分ベクトル空間 $W \subset V$ で，

$$\rho(g)w \in W \quad (g \in G,\ w \in W)$$

をみたすものを V の不変部分空間という．不変部分空間が $\{0\}$, V のみであるとき，(V, ρ) は既約表現であるという．

群 G の複素表現 (V_i, ρ_i) $(i = 1, 2)$ に対し，直和 $V_1 \oplus V_2$ やテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ は

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1 \oplus v_2) = \rho_1(g)v_1 \oplus \rho_2(g)v_2,$$
$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2$$

によって G の複素表現になる．

2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ は，行列式 1 の 2 次ユニタリ行列全体の集合である．$g \in SU(2)$ に対し，

$$g \begin{bmatrix} iz & x+iy \\ -x+iy & -iz \end{bmatrix} g^{-1} = \begin{bmatrix} iz' & x'+iy' \\ -x'+iy' & -iz' \end{bmatrix},$$

$$\pi(g) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

によって群の全射準同型 $\pi : SU(2) \to SO(3)$ が定義される．$\mathrm{Ker}(\pi) = \{E, -E\}$ である．

2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の複素既約表現は，次のように与えられる．

自明な 1 次元表現を $\underline{\mathbf{1}}$ と書くことにする．次に $SU(2)$ の元である 2 次正方行列の作用する 2 次元ベクトル空間を $\underline{\mathbf{2}}$ とおくと，これが 2 次元既約表現になる．そして 4 次元表現 $\underline{\mathbf{2}} \otimes \underline{\mathbf{2}}$ は $\underline{\mathbf{1}}$ と 3 次元既約表現 $\underline{\mathbf{3}}$ の直和に分解する．さらに 6 次元表現 $\underline{\mathbf{3}} \otimes \underline{\mathbf{2}}$ は $\underline{\mathbf{2}}$ と 4 次元既約表現 $\underline{\mathbf{4}}$ の直和に分解し，8 次元表現 $\underline{\mathbf{4}} \otimes \underline{\mathbf{2}}$ は $\underline{\mathbf{3}}$ と 5 次元既約表現 $\underline{\mathbf{5}}$ の直和に分解する．一般に，$2n$ 次元表現 $\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{2}}$ は $\underline{\mathbf{n-1}}$ と $n+1$ 次元既約表現 $\underline{\mathbf{n+1}}$ の直和に分解する．こうして $SU(2)$ のすべての既約表現が得られる．

これを，グラフ（頂点と辺からなる図形）

$$\underline{\mathbf{1}} — \underline{\mathbf{2}} — \underline{\mathbf{3}} — \underline{\mathbf{4}} — \cdots$$

で表すことにする．$V' — V — V''$ は，

$$V \otimes \underline{\mathbf{2}} = V' \oplus V''$$

を意味する．これをマッカイ・グラフとよぶ．

5. $SU(2)$ の有限部分群の表現

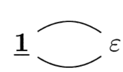
群 $SU(2)$ の有限部分群 Γ の複素既約表現について考える．

群 Γ が位数 $n+1$ の巡回群であるとき Γ を $\Gamma(\widetilde{A}_n)$ と書く．また，$\pi(\Gamma)$ が位数 $2n$ の二面体群であるとき $\Gamma(\widetilde{D}_{n+2})$，正四面体群であるとき $\Gamma(\widetilde{E}_6)$，正八面体群であるとき $\Gamma(\widetilde{E}_7)$，正二十面体群であるとき $\Gamma(\widetilde{E}_8)$ と書く．記号の意味については後で述べる．

群 $\Gamma(\widetilde{A}_1) = \{E, -E\}$ の既約表現は，自明な 1 次元表現 $\underline{\mathbf{1}}$ と自明でない 1 次元表現 ε である．ε においては，$-E$ が -1 倍で作用する．群 $SU(2)$ の 2 次元既約表現の制限をやはり $\underline{\mathbf{2}}$ と書くと，

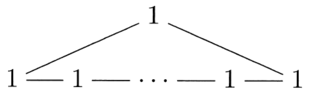
$$\underline{\mathbf{1}} \otimes \underline{\mathbf{2}} = \varepsilon \oplus \varepsilon, \quad \varepsilon \otimes \underline{\mathbf{2}} = \underline{\mathbf{1}} \oplus \underline{\mathbf{1}}$$

である．これをマッカイ・グラフ



で表す．このグラフは $\widetilde{A}_1$ 型拡大ディンキン図とよばれるものである．

群 $\Gamma(\widetilde{A}_n)$ の場合，マッカイ・グラフは $n+1$ 角形になる．このグラフは $\widetilde{A}_n$ 型拡大ディンキン図とよばれるものである．



図の数字は既約表現の次元を表す．

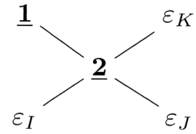
群 $\Gamma(\widetilde{D}_4)$ の場合，$\pi(\Gamma(\widetilde{D}_4))$ は位数 4 の二面体群であり，

$$\Gamma(\widetilde{D}_4) \cong \{\pm 1,\, \pm I,\, \pm J,\, \pm K\},$$
$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K,$$
$$JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J$$

である．正規部分群

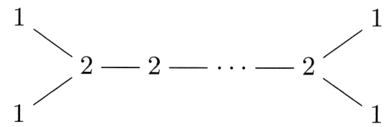
$$\{\pm 1,\, \pm I\}, \quad \{\pm 1,\, \pm J\}, \quad \{\pm 1,\, \pm K\},$$

による剰余群はいずれも $\mathbb{Z}/2$ であり，それぞれの正規部分群が自明に作用する非自明な 1 次元表現が 1 つずつある．これらを $\varepsilon_I, \varepsilon_J, \varepsilon_K$ と書こう．2 次元表現 $\underline{\mathbf{2}}$ は既約であり，テンソル積 $\underline{\mathbf{2}} \otimes \underline{\mathbf{2}}$ は，上の 3 つの非自明な 1 次元表現と自明な 1 次元表現の直和に分解する．したがってマッカイ・グラフは



となる．これは $\widetilde{D}_4$ 型拡大ディンキン図とよばれるものである．

群 $\Gamma(\widetilde{D}_n)$ の場合，マッカイ・グラフは $n+1$ 個の頂点をもつ $\widetilde{D}_n$ 型ディンキン図形とよばれるものである．



群 $\Gamma(\widetilde{E}_6)$ の場合，正四面体の頂点を一つも固定しない元と単位元とが正規部分群 N をなし，剰余群は $\mathbb{Z}/3$ に同型である．よって N が自明に作用する非自明な 1 次元表現が 2 つある．これを $\omega, \bar{\omega}$ と書く．$\underline{\mathbf{2}}, \underline{\mathbf{3}}$ の $\Gamma(\widetilde{E}_6)$ への制限は既約である．マッカイ・グラフは

$$
\begin{array}{c}
\underline{\mathbf{1}} \\
| \\
\underline{\mathbf{2}} \\
| \\
\omega — \underline{\mathbf{2}} \otimes \omega — \underline{\mathbf{3}} — \underline{\mathbf{2}} \otimes \bar{\omega} — \bar{\omega}
\end{array}
$$

となる．これは $\widetilde{E}_6$ 型拡大ディンキン図とよばれるものである．

群 $\Gamma(\widetilde{E}_7)$, $\Gamma(\widetilde{E}_8)$ の場合，マッカイ・グラフは $\Gamma(\widetilde{E}_7)$, $\Gamma(\widetilde{E}_8)$ 型拡大ディンキン図とよばれるものである．

$$
\begin{array}{c}
2 \\
| \\
1 — 2 — 3 — 4 — 3 — 2 — 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad 3 \\
\qquad\qquad\quad | \\
2 — 4 — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1
\end{array}
$$

構成より，$\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_k$ $(k = 6, 7, 8)$ 型拡大ディンキン図の各頂点に正の整数を置き，各頂点に置いた数の 2 倍が隣接する頂点に置いた数の合計に等しくなるようにすることができる．

不思議なことに，$\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_k$ $(k = 6, 7, 8)$ 型拡大ディンキン図は，数学の様々な対象を分類する際に現れる．

群 $SO(3)$ の有限部分群に $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_k$ $(k = 6, 7, 8)$ 型拡大ディンキン図を対応させる方法も，上で述べたもの以外に複数のものが知られている．商空間 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の特異点解消による方法，$\mathbb{C}^2/\Gamma$ をリー群のべき零軌道として実現する方法，次節で少し触れる箙多様体において $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の特異点解消を実現する方法である．これらの方法の間の関係を調べることは，幾何学的表現論の重要な主題であって，近年その理解が深まってきている．

6. 線型写像の連続的不変量の分類

体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元ベクトル空間 V から W への線型写像は，$GL(V) \times GL(W)$ の作用で同一視すると，ランクとよばれる非負整数に値をとる不変量によって分類される．

一方，線型写像 $\varphi : V \to V$ の場合，その固有多項式の係数は $GL(V)$ の作用によって不変である．

このように，線型写像が固有多項式の係数のような体 $\boldsymbol{k}$ に値をとる『連続的』不変量をもつ場合と，ランクのような離散的不変量しかもたない場合がある．この違いはどこから来るのだろうか．

有限連結有向グラフ

$$\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1;\ s, t : \Gamma^1 \to \Gamma^0)$$

を考える．有限集合 Γ^0, Γ^1 はそれぞれ頂点の集合，辺の集合で，辺 $e \in \Gamma^1$ は頂点 $s(e)$ から $t(e)$ への矢印で表す．

各頂点 $v \in \Gamma^0$ に有限次元ベクトル空間 V_v を置き，ベクトル空間

$$L = \bigoplus_{e \in \Gamma^1} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V_{s(e)}, V_{t(e)})$$

に対する群 $G = \prod_{v \in \Gamma^0} GL(V_v)$ の作用を考える．スカラー倍すなわち $\boldsymbol{k}^\times \subset G$ の L への作用は自明なので，

$$\dim L - \dim G \geq 0$$

ならば，L（の開集合）上に G 不変な $\boldsymbol{k}$ 値関数が存在する．$d_v = \dim V_v$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\dim L - \dim G &= \sum_e d_{s(e)} d_{t(e)} - \sum_v {d_v}^2 \\
&= \sum_v \left(-d_v + \sum_e \frac{d_{v'}}{2} \right) d_v \\
&\qquad (\{s(e), t(e)\} = \{v, v'\})
\end{aligned}
$$

となるので，

$$2d_v = \sum_e d_{v'} \quad (\{s(e), t(e)\} = \{v, v'\})$$

ならば $\dim L - \dim G = 0$ となって，L 上に G 不変な $\boldsymbol{k}$ 値関数が存在する．

最初の例は有向グラフ $\circ \to \circ$ に対応し，二つ目の例は



に対応する．

ここで，次が成立する（ガブリエルの定理）．

- $\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_k$ $(k = 6, 7, 8)$ 型拡大ディンキン図を部分グラフとして含まないような有限連結グラフに対して，各頂点に正の整数を置いて，各頂点に置いた数の 2 倍が隣接する頂点に置いた数の合計に等しくなるようにすることはできない．
- $\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_k$ $(k = 6, 7, 8)$ 型拡大ディンキン図を部分グラフとして含まないような有限連結グラフは，A_n, D_n, E_k $(k = 6, 7, 8)$ 型ディンキン図とよばれるもののいずれかである．
- A_n, D_n, E_k $(k = 6, 7, 8)$ 型ディンキン図に対し，L 上の G 不変な $\boldsymbol{k}$ 値関数は存在しない（すなわちこの場合，ランクのような離散的な不変量しか存在しない）．

先に述べたように，$\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_k$ $(k = 6, 7, 8)$ 型拡大ディンキン図の各頂点に正の整数を置き，各頂点に置いた数の 2 倍が隣接する頂点に置いた数の合計に等しくなるようにすることができる．

したがって，$\widetilde{A}_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{E}_k$ $(k = 6, 7, 8)$ 型拡大ディンキン図の各頂点 v に有限次元ベクトル空間 V_v $(\dim V_v = d_v)$ を置き，

$$2d_v = \sum_e d_{v'} \quad (\{s(e),\, t(e)\} = \{v,\, v'\})$$

が成り立つようにすることができる．このとき，辺の向きを任意に与えると，L 上に G 不変な $\boldsymbol{k}$ 値関数が存在する．

以上の議論では，グラフの辺の矢印の向きを任意に固定した．L の代わりに $P = L \oplus L^*$ を考えれば，矢印の向きのデータは不要になる．ベクトル空間 P 上の自然なシンプレクティック形式に対して，シンプレクティック商 $P//G$ を考えるのが箙多様体の理論である．ここで考えている L 上の G 不変な量は，そのラグランジアン部分多様体上の関数に相当する．

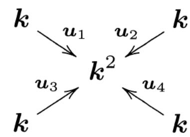
7. 連続的不変量の例

$\widetilde{A}_n$ 型の中でもっとも簡単な $\widetilde{A}_1$ 型の有向グラフ

$$\boldsymbol{k} \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} \boldsymbol{k} \qquad (a,\, b) \in L = \boldsymbol{k}^2$$

の場合，比すなわち $\dfrac{a}{b} \in \boldsymbol{k}$ が L 上の G 不変な量である．

$\widetilde{D}_n$ 型の中でもっとも簡単な $\widetilde{D}_4$ 型の有向グラフ



$$(\boldsymbol{u}_j)_{j=1}^4 \in L = (\boldsymbol{k}^2)^4, \quad \boldsymbol{u}_j = \begin{bmatrix} u_j^1 \\ u_j^2 \end{bmatrix}$$

の場合，このデータは射影直線上の 4 点を与えている．

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} u_i^1 & u_j^1 \\ u_i^2 & u_j^2 \end{vmatrix}$$

とおくと，プリュッカー関係式

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

が成り立つ．このとき，

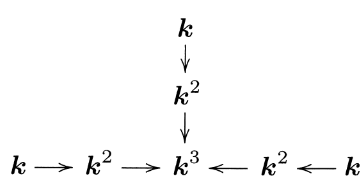
$$\frac{p_{12}p_{34}}{p_{13}p_{24}}, \quad \frac{p_{12}p_{34}}{p_{14}p_{23}}, \quad \frac{p_{13}p_{24}}{p_{14}p_{23}}$$

（あるいはその逆数，さらに (-1) 倍したもの）を**複比**あるいは**非調和比**というが，これらは L 上の G 不変な量である．これは射影直線上の 4 点に対する射影不変量（射影変換で不変な量）である．

こうして，比が $\widetilde{A}_1$ 型拡大ディンキン図に対する不変量であり，複比が $\widetilde{D}_4$ 型拡大ディンキン図に対する不変量であることがわかった．

8. メネラウスの定理・チェバの定理

$\widetilde{E}_k$ 型の中でもっとも簡単な $\widetilde{E}_6$ 型の有向グラフ



の場合，このデータは射影平面上の3直線とそれぞれの上の点を与えている．

三角形 △ABC と直線 BC, CA, AB 上の点 P, Q, R に対し，

$$\mu = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$$

とおくと，μ は射影変換で不変になっている（ここで，平行な2線分の比 $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}, \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}, \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$ はそれぞれ符号つきで考えている）．この量 μ が $\widetilde{E}_6$ 型拡大ディンキン図に対する不変量である．

この不変量は，古典的な定理

メネラウスの定理 P, Q, R が一直線上にある $\iff \mu = -1$.

チェバの定理 直線 AP, BQ, CR が一点で交わる $\iff \mu = 1$.

に現れる．この2つの定理はアフィン幾何の代表的な定理だが，μ が射影変換で不変な量であることに注意すると，実は射影幾何の定理だったのである．

比，複比，およびメネラウスの定理・チェバの定理に現れる量が，こうして一つの統一的観点から位置づけられた．振り返るとこれは，線型写像の連続的不変量の『分類』を考察してみたからである．このように，分類という作業が既知の対象の間の未知の関係を明らかにすることもある．

9. 分類と有限性

正多面体が有限個しかないことは，自明なことではなく，調べてみたらそうだった，という類のものである．分類してみたら有限個しかなかった，という話は他にもあって，そのようにして得られた有限個の対象は，数学のいろいろなところに非自明な形で姿を現す．例外型リー環や例外型対称空間，散在型有限単純群はその代表である．

このような有限性の結果の一つに，正多面体群にも関連するガロアによる定理がある．

位数 q の有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ という $q+1$ 点集合に推移的に作用する群

$$PSL_2(\mathbb{F}_q) = SL_2(\mathbb{F}_q)/\{E, -E\}$$

は指数 $q+1$ の部分群をもつ．群 $SL_2(\mathbb{F}_q)$ は，$\mathbb{F}_q$ の元を成分とする行列式1の2次正方行列全体の集合である．

ガロアは次の事実に気づいていた．

定理 $PSL_2(\mathbb{F}_q)$ が指数 q の部分群をもつならば，$q = 2, 3, 5, 7, 9, 11$.

さらに，$PSL_2(\mathbb{F}_q)$ の指数 q の部分群はすべて $SO(3)$ の部分群であることも確かめられる．すなわち，$PSL_2(\mathbb{F}_2)$ の指数2の部分群は位数3の巡回群，$PSL_2(\mathbb{F}_3)$ の指数3の部分群は位数4の二面体群，$PSL_2(\mathbb{F}_5)$ の指数5の部分群は正四面体群，$PSL_2(\mathbb{F}_7)$ の指数7の部分群は正八面体群，$PSL_2(\mathbb{F}_9)$ の指数9の部分群は正二十面体群，$PSL_2(\mathbb{F}_{11})$ の指数11の部分群は正二十面体群である．

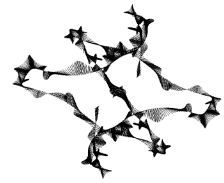
参考文献

1) 山内恭彦・杉浦光夫『連続群論入門』培風館（新装版：2010）．
2) J.-P. セール『有限群の線型表現』（岩堀長慶，横沼健雄訳）岩波書店 (1974).
3) 草場公邦『行列特論』裳華房 (1979).
4) 鈴木通夫『群論』岩波書店（上巻：1977，下巻：1978）．

（はしもと・よしたけ，東京都市大学知識工学部）

偏微分方程式の分類

楕円型，放物型，双曲型



宮本　安人

1. はじめに

偏微分方程式の解は様々な挙動をするため，すべてを統一して扱うことができません（扱ったとしても，そこから深い情報は得られません）．そこで，偏微分方程式を分類し，各類に属する方程式の解の性質を個別に調べることが重要となります．偏微分方程式の分類はいろいろな視点からのものがありますが，本稿では，自然現象の多くを記述する単独2階偏微分方程式を，**楕円型・放物型・双曲型**の3つに分類し，それぞれの解の性質について解説します．

2. 単独2階偏微分方程式の分類

ペトロフスキーの著書[1)]に従って，単独2階偏微分方程式を分類します．Ω を $\mathbb{R}^N$ 内の領域とし，次の微分方程式を考えます：

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}u_{x_ix_j} + f = 0. \tag{1}$$

ここで，$(x_1,\ldots,x_N)\in\Omega$，$a_{ij}$ と f は $x_1,\ldots,x_N,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_N}$ に依存してよいとします．以降，簡単のため係数 a_{ij} は定数と仮定しますが，変数係数でも基本的に同じです．

C^2 級の u を考えるので，$u_{x_ix_j}=u_{x_jx_i}$ が成り立ちます．従って，

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(1\le i,j\le N)$$

を仮定しても一般性は失われません（もしそうではないならば，$a'_{ij}=(a_{ij}+a_{ji})/2$ と置き直すと，$a'_{ij}=a'_{ji}$ を満たします）．A を行列 (a_{ij}) とします．このとき，A は対称行列であるので，対称行列の一般論より，ある直交行列 P が存在し，次のように実対角行列に変形できます：

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N\end{pmatrix}.$$

今，$\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ のうち，0 でないものの数を m とします．方程式 (1) の型を次のように定義します．

定義 1　**(i)** $m=N$ かつ，λ_i がすべて同符号のとき，(1) を楕円型と呼ぶ．

(ii) $m=N$ かつ，λ_i が一つだけ異符号のとき，(1) を双曲型と呼ぶ．

(iii) $m=N$ かつ，λ_i のうち正および負のものがそれぞれ2つ以上あるとき，(1) を超双曲型と呼ぶ．

(iv) $m<N$ のとき，(1) を（広義の）放物型と呼ぶ．

(v) $m=N-1$ のとき，ξ_i を次のように定義する：

$${}^t(\xi_1,\ldots,\xi_N)=P\,{}^t(x_1,\ldots,x_N).$$

このとき，

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i} + cu$$
$$= g(x_1,\ldots,x_N,u) \tag{2}$$

を，上記の変数変換で変換した方程式

$$\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{i=1}^{N} \tilde{b}_i u_{\xi_i} + \tilde{c}u$$
$$= \tilde{g}(\xi_1,\ldots,\xi_N,u)$$

を考える．λ_i $(1 \leq i \leq N-1)$ がすべて同符号であり，$\frac{\partial u}{\partial \xi_N}$ の係数がゼロでないとき，(2) を（狭義の）放物型と呼ぶ．

楕円型，放物型，双曲型の偏微分方程式の代表例は，それぞれ次のラプラス方程式，熱伝導方程式，波動方程式です：

$$\Delta u = 0 \quad （ラプラス方程式）, \tag{3}$$
$$u_t - \Delta u = 0 \quad （熱伝導方程式）, \tag{4}$$
$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad （波動方程式）. \tag{5}$$

a_{ij} が非定数の場合は，方程式の型が 1 つに定まらないことがあります．例えば，トリコミ方程式

$$-yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

では，係数の行列 A は次のようになります：

$$A = \begin{pmatrix} -y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

固有値は $-y$ と 1 なので，下半平面 $\{y < 0\}$ では楕円型，直線 $\{y = 0\}$ では（広義の）放物型，上半平面 $\{y > 0\}$ では双曲型となることが分かります．考える領域に応じて方程式の型が異なるというわけです．さらに，係数 a_{ij} が u にも依存してよいとすると，u の値に依っても方程式の型が異なることがあります．このような 2 つ以上の型を持つ方程式は扱いづらいため，以下では方程式の型が 1 つに定まる場合を考えます．

3. 2 変数の場合

次の 2 変数の偏微分方程式を考えます：

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d. \tag{6}$$

ここで a,b,c,d は，x,y,u,u_x,u_y に依存してよいとします．

3.1 方程式の型

(6) の型を調べます．係数の行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

となります．従って固有値は次の λ に関する 2 次方程式の根で与えられます：

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

まず，判別式は $D = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ となるので，固有値は常に実数です（このことは，対称行列の一般論からも分かります）．2 次方程式の形から，$b^2 - ac = 0$ のときは，零固有値が存在するので（広義の）放物型，$b^2 - ac < 0$ のときは，符号が等しい 2 つの実固有値が存在するので楕円型，$b^2 - ac > 0$ のときは，符号が異なる 2 つの実固有値が存在するので双曲型となります．(6) の偏微分作用素を形式的に多項式に置き換えた式 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \pm 1$ が，$b^2 - ac$ の符号に応じて，楕円，双曲線，放物線（1 階微分作用素がない場合は 2 つの直線）となり，偏微分方程式の型の名前と対応しています．

3.2 特性曲線

双曲型方程式の問題に有効な**特性曲線**を説明したいと思います．フリッツ・ジョンの著書[2)]に沿って (6) の特性曲線を定義します．xy 平面上の与えられた曲線 γ

$$x = f(s), \quad y = g(s)$$

に沿って，u, u_x, u_y の値を指定します：

$$u = h(s), \quad u_x = \phi(s), \quad u_y = \psi(s). \tag{7}$$

(7) をコーシー・データと呼び，(7) と (6) を満たす関数を求める問題を**コーシー問題**（または**初期値問題**）と呼びます．(7) の 1 番目の条件から，$u(f(s), g(s)) = h(s)$ を満たします．これを s で

微分し，次を得ます：

$$\phi(s)f'(s)+\psi(s)g'(s)=h'(s). \qquad (8)$$

これより，h, ϕ, ψ は 2 つまでしか独立に指定することができないことが分かります．(7) の 2 番目と 3 番目の条件から，次が得られます：

$$u_x(f(s),g(s))=\phi(s), \quad u_y(f(s),g(s))=\psi(s).$$

さらに，s で微分すると，u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} に関する関係式を 2 つ得ます．(6) とこの 2 つを合わせると，次のようになります：

$$\begin{aligned} au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy} &= d, \\ f'u_{xx}+g'u_{xy} \qquad\quad &= \phi', \\ f'u_{xy}+g'u_{yy} &= \psi'. \end{aligned}$$

従って，

$$\delta := \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \end{vmatrix} = a(g')^2-2bf'g'+c(f')^2=0 \qquad (9)$$

とならない限り，u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} は，この連立方程式から一意的に決まります．$\delta=0$ の場合は，連立方程式は解が無数にあるか存在しないか，この条件だけから決定することはできません．そこで，$\delta=0$ のとき曲線 γ は特性的と呼び，$\delta\neq 0$ のとき非特性的と呼びます．さらに，γ 上，常に $\delta=0$ のとき，γ を特性曲線と呼びます．

次に，$(x,y)=(f(s),g(s))$ から，次を得ます：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dg}{ds}}{\frac{df}{ds}}=\frac{g'}{f'}.$$

一方，(9) を $(f')^2$ で割り，g'/f' に関する 2 次方程式を解くと，次を得ます：

$$\left(\frac{g'}{f'}=\right)\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

a,b,c が既知のとき，この常微分方程式を解くと特性曲線のグラフ表示 $y=y(x)$ が得られます．この式から，放物型のとき（$b^2-ac=0$）は 1 つの特性曲線を持ち，双曲型のとき（$b^2-ac>0$）は 2 つの特性曲線を持ち，楕円型のとき（$b^2-ac<0$）は実数の範囲では特性曲線を持たないことが分かります．

γ が特性的ではない場合は，上記の 3 連立方程式を s や x,y などで微分することにより，u の高次の偏微分係数が定まり，形式的べき級数が得られます．γ や係数がすべて解析的ならば，形式解は正当化され，この局所解の存在定理は**コーシー・コワレフスカヤの定理**[*1] と呼ばれています．本稿では 2 階偏微分方程式のみを取り上げますが，特性曲線は 1 階偏微分方程式の解析にも威力を発揮します．

一方，特性曲線上でコーシー・データが与えられているときは，解が存在しない場合や，複数の解がある場合などがあります．

4. 双曲型

以下，a,b,c は定数で $d=0$ のときに (6) を考えます．A が符号の異なる 2 つの実固有値を持つので，下記の形に変換できます：

$$u_{tt}-u_{xx}=0. \qquad (10)$$

このとき，(10) の特性曲線は $t=\pm x+C$ となることに注意してください．特性曲線に沿った方向を新たな座標軸とするように変数変換をします：

$$\xi=x+t, \quad \eta=x-t.$$

すると，(10) は次のようになります：

$$u_{\xi\eta}=0.$$

$(u_\xi)_\eta=0$ となるので，u_ξ は η に依存しません．そこで，$u_\xi=F'(\xi)$ とします．さらにこれを，両辺 ξ で積分すると，ある関数 $G(\eta)$ が存在し，次を得ます：

$$u=F(\xi)+G(\eta).$$

そして，ξ と η を元の変数に戻すと，次式を得

*1） コーシー・コワレフスキーの定理とも呼ばれています．

ます：

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t). \qquad (11)$$

u が C^2 級となるためには，F と G が C^2 級でなければなりません．従って，(11) が (10) の一般解となります．

t, x をそれぞれ時間変数，空間変数とみなすと，(10) は（時空間の領域は 2 次元ですが）1 次元空間の波動方程式となります．これは，無限に長い弦の上を微小変形が伝わる現象を記述する近似方程式です．今，$t=0$ のとき弦の変形を $u(0,x)=h(x)$，弦の変形速度を $u_t(0,x)=\psi(x)$ とします．xt 平面上の直線 $\{t=0\}$ で u と u_t を指定しているので，これはコーシー・データになります．また，$\{t=0\}$ は非特性的であることにも注意してください．(11) に $t=0$ を代入し，次を得ます：

$$(u(0,x)=)h(x) = F(x) + G(x). \qquad (12)$$

また，(11) を t で微分し $t=0$ を代入すると，次が得られます：

$$(u_t(0,x)=)\psi(x) = F'(x) - G'(x).$$

これを，両辺 x で積分し，次を得ます：

$$F(x) - G(x) = \int_0^x \psi(\zeta)d\zeta + 2C. \qquad (13)$$

(12) と (13) を連立させて，次を得ます：

$$F(x) = \frac{h(x)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x \psi(\zeta)d\zeta + C,$$
$$G(x) = \frac{h(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x \psi(\zeta)d\zeta - C.$$

これらを (11) に代入しコーシー問題の一般解を得ます：

$$u(t,x) = \frac{h(x+t)+h(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta. \qquad (14)$$

(14) をダランベールの解と呼びます．特に $h(x) = \max\{0, 1-|x|\}$, $\psi(x) \equiv 0$ の場合を考えてみましょう．すると，静止している弦上のある点を叩いて変形させたとき，弦の変形が左右に等速度で伝播する様子が (14) から想像されます．この伝播は，xt 平面上では特性曲線に沿ったものとなります．$(x,t)=(x_0,0)$ における影響は，2 つの特性曲線で囲まれる領域 $|x-x_0| \le t$ $(t \ge 0)$ におよぶので，この領域を**影響領域**と呼びます（図 1）．また，$u(t_0,x_0)$ は，x 軸上の線分 $[x_0-t_0, x_0+t_0]$ における u と u_t の値に依存するので，この区間を**依存領域**と呼びます（図 2）．

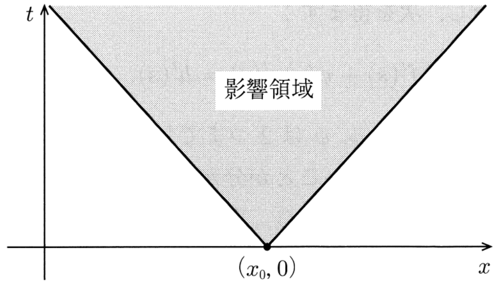


図 1 影響領域．

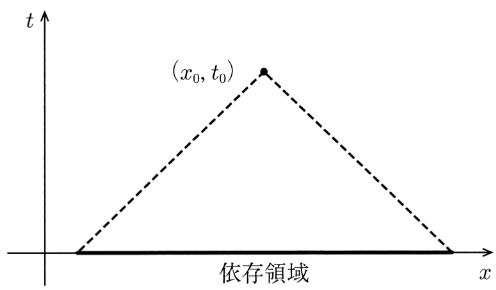


図 2 依存領域．

空間次元が 2 次元（時空間は 3 次元）の場合を考えます．(5) は無限に広い太鼓の膜の上を微小変形が等方的に伝播する現象を記述する近似方程式となります．波動方程式 (5) の一般解は次のようになることが知られています：

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi t}\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|\le t} \frac{h(\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\zeta}}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi t}\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|\le t} \frac{\psi(\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\zeta}}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|^2}}.$$

これをポアソンの解と呼びます．影響領域は 3 次元時空間内の（中身の詰まった）円錐 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \le t-t_0$ $(t \ge t_0)$ となります．影響領域が円錐表面に限らないことに注意してください．

空間 3 次元（時空間は 4 次元）の場合を考えま

す．(5) は 3 次元空間内に満たされた空気の振動が等方的に伝播し，音が伝わる現象を記述する近似方程式となります．(5) は次のキルヒホッフの解

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|=t} h(\boldsymbol{\zeta})dS_{\boldsymbol{\zeta}}\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|=t} \psi(\boldsymbol{\zeta})dS_{\zeta}$$

を持つことが知られています．この場合の影響領域は円錐表面 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| = t - t_0$ $(t \geq t_0)$ になります．従って，2 次元の場合と異なり円錐の中身は影響領域となりません．影響領域が円錐表面に限られることを，**ホイヘンスの原理**と呼びます．

いずれの場合も，影響領域が円錐の外側になることがない，すなわち，影響がある有限速度（この場合は 1）を超えて伝播することがないので，波動方程式は**有限伝播性**を持つといいます．

5. 放物型

代表的な（狭義の）放物型方程式である熱伝導方程式 (4) を，空間 N 次元（時空間は $N+1$ 次元）で考えます．これは，均一の材料でできた物体内の熱の伝わり方を記述する方程式です．(4) は，**拡散方程式**とも呼ばれます．

時空間内の超平面 $\{t=0\}$ で，初期温度 $u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ を指定します．空間 1 次元の場合は，方程式は $u_t = u_{xx}$ となり，特性曲線は xt 平面内の $t = C$ となります．従って，物理的に自然な初期条件が，特性曲線上の条件となってしまい，解が存在しなかったり解が一意的に定まらない可能性があることを示唆しています．しかし，その問題には立ち入らず，ここではある意味で自然な解のみを考えることにします．$K(t,\boldsymbol{x})$ を次で定義します：

$$K(t,\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}\right). \quad (15)$$

直接計算によって，K は (4) を満たすことが分かります．(15) を**熱核**と呼びます．ここで，天下り的ですが，u を次で定義します：

$$u(t,\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^N} K(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta})u_0(\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\zeta}. \quad (16)$$

u_0 が有界で連続ならば，実は，(16) は (4) を満たし，次の極限が成り立つことが示せます：

$$\lim_{t\downarrow 0} u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$$

((16) が (4) を満たすことは，積分記号下における偏微分を計算することによって簡単に確かめられます)．従って，(16) は熱伝導方程式のコーシー問題の解となることが分かります．解の表示 (16) から直ちに次のことが分かります．$u_0(\boldsymbol{x}) = \max\{0, 1-|\boldsymbol{x}|\}$ と指定します．すると，$u_0(\boldsymbol{x})$ は微分不可能な点があるにもかかわらず，$t>0$ のとき u は x_i $(1 \le i \le N)$ や t について何回でも偏微分可能となります．このことを放物型方程式は**平滑化作用**を持つといいます．(14) を見ると波動方程式にはない性質であることがわかります．さらに，$u_0(\boldsymbol{x})$ は遠方では 0 であるにもかかわらず，$t>0$ をどんなに小さくとっても，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ で，$u(t,\boldsymbol{x}) > 0$ となります．これは，波動方程式とは異なり熱伝導方程式は有限伝播性を持たず，$t=0$ での攪乱の影響は瞬時に全領域 $\mathbb{R}^N$ に及ぶことを示しています．

波動方程式が持たない重要な性質を 2 つ挙げたいと思います．まず，(16) から次の不等式を得ます：

$$\inf_{\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^N}\{u_0(\boldsymbol{\eta})\}\int_{\mathbb{R}^N} K(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\zeta} \le u(t,\boldsymbol{x})$$
$$\le \sup_{\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^N}\{u_0(\boldsymbol{\eta})\}\int_{\mathbb{R}^N} K(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\zeta}.$$

ガウス積分から $\int_{\mathbb{R}^N} K(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\zeta} = 1$ が成り立つので，これを用いて次を得ます：

$$\inf_{\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^N} u_0(\boldsymbol{\zeta}) \le u(t,\boldsymbol{x}) \le \sup_{\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^N} u_0(\boldsymbol{\zeta}).$$

任意の $(\boldsymbol{x},t)$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N, t \ge 0)$ において初期の最大温度を超えず，最小温度より下がらないことを示しています．これを（弱）**最大値原理**と呼びます．

もう一つの性質は，空間 1 次元の場合に成り立ちます．いま，$u(t,x)$ を次の 1 次元放物型方程式の解とします：

$$u_t = a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u.$$

ここで，$a>0$, a,b,c は滑らかな関数とします．次に，$\mathcal{Z}[u(t_0,\cdot)]$ を $u(t_0,x)=0$ となる x の個数とします．この $\mathcal{Z}$ を零点数と呼びます．このとき，$t_0 < t_1$ ならば $\mathcal{Z}[u(t_0,\cdot)] \ge \mathcal{Z}[u(t_1,\cdot)]$ が成り立ち，**零点数非増大則**と呼びます．例えば，初期関数が正とすると，$u(0,x)$ は零点を持たないので $\mathcal{Z}[u(0,\cdot)]=0$ となります．従って，$t>0$ のとき $0=\mathcal{Z}[u(0,\cdot)] \ge \mathcal{Z}[u(t,\cdot)]$ となり，常に $\mathcal{Z}[u(t,\cdot)]=0$ となります．これは，$u(t,x)$ が定符号であることを示しているので $u(t,x)>0$ であることが分かり，最大値原理に相当します．従って，零点数非増大則は最大値原理を精密化したものとみなせます．また，零点数はグラフの「複雑さ」と解釈できるので，時間が進むとグラフは複雑にはならないことを示しています．零点数非増大則は単純に見えるものの 80 年代から強力な手法であると認識され始め，この定理を用いた研究は現在まで活発に行われています．

最後に，次の放物型 4 連立偏微分方程式を紹介したいと思います：

$$\begin{cases} V_t = kV_{xx} - a_1 m^3 h(V-V_1) \\ \qquad - a_2 n^4 (V+V_2) - a_3(V+V_3), \\ m_t = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m, \\ h_t = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h, \\ n_t = \alpha_n(V)(1-h) - \beta_n(V)n. \end{cases}$$

方程式の解説は省略しますが，これは神経細胞内を電気パルスが伝わる現象を記述したモデルで，ホジキン・ハクスレー方程式と呼ばれています．1952 年にアラン・ホジキンとアンドリュー・ハクスレーは，パルス信号が波形を崩さず伝達される仕組みを理解するため，このモデル方程式を提唱しました．数学的には，進行波解と呼ばれる $\varphi(x-ct)$ の形の解を持ち，ある意味で安定となることが期待されます．(14) から想像されるように，当時，安定な進行波解を持つためには波動方程式で表現され

なくてはならないと考えられており，拡散現象を記述する放物型方程式がそのような解を持つのは予想外のことでした．ヤリイカの神経を用いた実際の実験と数値実験を比較したこの研究は，1963年にノーベル生理学・医学賞を受賞しました．

6. 楕円型

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とし，$\partial\Omega$ をその境界とします．次の熱伝導方程式を考えます：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

2 番目の式は，境界上では与えられた関数 $g(\boldsymbol{\zeta})$ $(\boldsymbol{\zeta} \in \partial\Omega)$ に常に等しいことを意味します．

今, 定常状態を求める問題を考えましょう．$u_t = 0$ となるので，次の問題になります：

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{17}$$

このような問題を**境界値問題**と呼びます．(17) は典型的な楕円型方程式の問題です．

楕円型方程式では，特性曲線が存在しないので，解析的曲線上に解析的なコーシー・データを与えれば, コーシー・コワレフスカヤの定理から, 近傍上で解が存在します．しかし, 解析的でない C^2 級のコーシー・データの場合は, 局所解さえ存在しません．なぜなら，特性曲線を含む領域上で $\Delta u = 0$ を満たすので，一般論からこの領域上 u が解析的となってしまい，矛盾するからです．もし (17) のように領域の境界上に条件がある場合は，鏡映を用いて領域の外部に解を少し拡張することにより，領域内部の議論に帰着でき，矛盾を導けます．コーシー・データが解析的関数というのでは扱える関数の範囲が狭すぎるので，楕円型方程式の場合は通常は初期値問題を考えずに，境界値問題を考えます．

Ω と g に C^2 級などの滑らかさを仮定すると, (17) は一意的な解を持つことが知られています (このことは，上記の解の非存在の議論と矛盾しません，なぜなら u の境界に対する法線方向の偏微分係数 $\partial_\nu u$ が (17) では与えられておらず，境界条件が完全なコーシー・データとなってないからです)．一般的には，その解を陽に表すことはできませんが，Ω が 2 次元単位円板の場合は，次で与えられることが知られています：

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)g(\zeta)}{1-2r\cos(\theta-\zeta)+r^2}\,d\zeta.$$

ここで，(r,θ) は極座標系です．これをポアソン積分と呼びます．$r < 1$ ならば，g の滑らかさに依らず r や θ で何回でも偏微分できるので，u は C^∞ 級であることが分かります．これは，放物型方程式の平滑化作用に対応しており，楕円型方程式の解の**内部正則性**と呼ばれています．

また，(強) 最大値原理

$$\min_{\boldsymbol{\zeta} \in \partial\Omega} g(\boldsymbol{\zeta}) < u(\boldsymbol{x}) < \max_{\boldsymbol{\zeta} \in \partial\Omega} g(\boldsymbol{\zeta}) \quad (\boldsymbol{x} \in \Omega \backslash \partial\Omega)$$

も成り立つことが知られています．従って，u を温度とみなせば最大温度と最小温度は境界上でのみ達成し，内点で最大温度と最小温度は達成しません．円板領域の場合は，ポアソン積分を用いて放物型方程式の場合と同様に示すことができます．解の正則性と最大値原理の 2 つの重要な性質が成り立つので，**楕円型方程式は放物型方程式に近い**と言えます．

楕円型方程式の研究の歴史は長く，基礎的な理論は既に完成されています．そこで，(拡散効果を持っている) ラプラシアンと非線形項とのバランスが解の性質に与える影響や，領域の幾何的性質が与える影響など，問題個別的な方向へ研究は深化しています．最後に，これに関連した興味深い結果を 2 つ紹介します．

まず，$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とします．次の非線形楕円型方程式を考えます：

$$\begin{cases} \Delta u + u^5 = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{18}$$

定理 1 **(i)** Ω が可縮でないとき (18) は解を持つ.
(ii) Ω が星形領域のとき (18) は解を持たない.

(ii) は 1965 年に，(i) は 1988 年に得られた結果です．この定理によって，(18) は非線形楕円型方程式の解の存在と領域のトポロジーが密接に関係する重要な例となりました．

次に，$B_R \subset \mathbb{R}^N$ を半径 $R > 0$ の球とします．このとき次の楕円型方程式について考えます：

$$\begin{cases} \Delta u + e^u = 0 & \text{in } B_R, \\ u = 0 & \text{on } \partial B_R. \end{cases} \tag{19}$$

定理 2 **(i)** $3 \leq N \leq 9$ の場合, ある $R^* > 0$ が存在し (19) は無限個の解を持つ．また, $R \neq R^*$ ならば解を持たないか高々有限個の解を持つ.
(ii) $N \geq 10$ の場合，ある $R^* > 0$ が存在し $0 < R < R^*$ ならば (19) はただ一つの解を持ち，$R \geq R^*$ ならば解を持たない.

$N = 3$ の場合は 1959 年，$N \geq 4$ の場合は 1973 年に証明されました．球のような単純な形状の領域でも，空間次元によって解構造が大幅に異なることが示唆されています．

楕円型方程式の解の性質と領域の形状との関係は未知の部分が大きく，多くの研究者の興味を惹きつけています．

謝辞 一宮尚志氏 (岐阜大学) には有用なコメントを頂きました．この場を借りて御礼申し上げます．

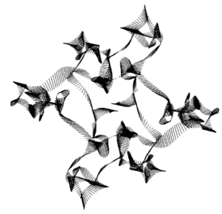
参考文献

1) イ・ゲ・ペトロフスキー（吉田耕作校閲，渡辺毅訳）：『偏微分方程式論』，東京図書 (1958).
2) フリッツ・ジョン (佐々木徹，示野信一，橋本義武訳)：『偏微分方程式』，丸善出版 (2003).

（みやもと・やすひと，東京大学大学院数理科学研究科）

特集／分類する《数理科学》

力学系における分類



浅岡　正幸

■　1. 可微分力学系の「分類」　■

単純化して言うならば，力学系理論とは，写像の反復合成や，ベクトル場の定める流れなどの決定論的な時間発展の挙動に関する理論である．本稿では，離散時間の可逆な可微分力学系，すなわち，微分同相写像の反復合成について，「理解可能性」の観点からの分類について述べたい．筆者の私見ではあるが，力学系は基本的に「よくわからないもの」であり，理解可能な集団をその中から見つけ出すことで徐々に「わかるもの」の領域を拡げてきたのが力学系理論の歴史だったのではないだろうか．まず最初に詳しく研究され，摂動に対する安定性が証明されたのは，最も単純な漸近挙動を示すMorse–Smale系であった．次に，Morse–Smale系やそれ以外の摂動に対する安定性を持つ系の特徴を抽出する形で双曲力学系の概念が確立された．Morse–Smale系とは異なり，双曲力学系は一般には複雑な振舞いをし得るが，その複雑さも記号力学系によって記述することができる「理解可能なもの」であった．双曲力学系に関する美しい理論が展開される一方で，「わかるもの」の領域を拡げる試みは非双曲力学系へと向かい，道案内として，力学系全体の空間の稠密部分集合をいくつかのモデルで分類し，それらからの分岐を詳しく調べることで全体像を理解しよう，というPalisのプログラムが提唱された．その遂行への努力の過程で「わかるもの」の領域が部分双曲力学系へと拡がっていく一方で，普遍力学系と呼ばれる「真によくわならないもの」が豊富に存在することも明らかになり，現在に至っている．

以下ではこうした，「わかるもの」の領域を拡げる努力の中で見出された，漸近挙動が完全に理解できるものから「真によくわからないもの」までの分類を，単純なものから順に見ていくことにしよう．引用元が明記されていない結果については，Robinson[21)]や，KatokとHasselblatt[10)]による教科書などを参照してほしい．

■　2. 位相力学系に関する準備　■

可微分力学系の分類を始める前に，位相力学系に関する基本的な概念を振り返っておこう．以下，$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ でそれぞれ整数全体，実数全体のなす集合を表すものとする．f を位相空間 X 上の同相写像とする．$n \geq 1$ に対して，f の n 回反復合成 $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}$ を f^n で表す．f^0 を恒等写像とし，$n \geq 1$ に対して，$f^{-n} = (f^{-1})^n$ と定める．$x \in X$ に対して，集合 $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を x の**軌道**という．$f(x) = x$ であるとき，x は f の**不動点**であるといい，$f^N(x) = x$ となる $N \geq 1$ が存在するとき，x は周期 N を持つ**周期点**であるという．周期点の全体を $\mathrm{Per}(f)$ で表す．x が周期点であることとその軌道が有限集合であることは同値である．

力学系の漸近挙動を調べる際に重要なのは，反

復合成の下で何らかの回帰性を示すような点である．近傍が回帰的である点として非遊走点を定義しよう．x が**非遊走点**であるとは，任意の x の近傍 U に対して，$f^N(U) \cap U \neq \emptyset$ となる $N \geq 1$ が存在することをいう．例えば，周期点は非遊走点である．また，円周上の無理数回転を考えると，円周上のすべての点が周期点ではない非遊走点となる．非遊走点全体のなす集合を**非遊走集合**といい，$\Omega(f)$ で表す．$\Omega(f)$ は X の閉部分集合であり，すべての $x \in X$ について，その軌道の集積点は $\Omega(f)$ に含まれる．

力学系は系の時間発展に関する理論であるが，時間発展で変わらないものを調べることが重要な場合が多い．X の部分集合 Λ が，$f(\Lambda) = \Lambda$ をみたすとき，Λ は f の**不変集合**であるという．各点の軌道や，$\mathrm{Per}(f)$, $\Omega(f)$ は代表的な不変集合である．

2 つの位相力学系の等価性を定義しよう．位相空間 X, Y と同相写像 $f : X \to X$，および $g : Y \to Y$ に対して，同相写像 $h : X \to Y$ が f と g の間の**位相共役写像**であるとは，$g \circ h = h \circ f$ が成り立つことをいう．また，このとき，f と g は**位相共役**であるという．位相力学系の理論とは，同相写像の位相共役で不変な性質についての理論であるということもできる．

■ 3. 双曲的周期点と Morse–Smale 系 ■

与えられた力学系を摂動したときにその性質がどのように変わるかという力学系の分岐の問題は，力学系全体を分類するという面からだけでなく，工学などにおける応用の面からも重要であり，力学系理論における主要なテーマの一つである．中でも，摂動によって性質が変化しない力学系の特徴づけを問う「安定性問題」が可微分力学系の理論の進展に及ぼした影響は計りしれない．

まず，力学系の摂動に対する安定性を定式化しよう．多様体 M 上の C^r 級微分同相写像全体のなす集合を $\mathrm{Diff}^r(M)$ で表す．この集合には C^r 位相と呼ばれる自然な位相が入る．$\mathrm{Diff}^r(M)$ の元 f が C^r-構造安定であるとは，C^r-摂動がその位相共役類を変えないこと，すなわち，f の（C^r 位相に関する）近傍 $\mathcal{U}$ で，それの属する元がすべて f と位相共役であるものが取れることをいう．$r \leq s$ のとき，C^s 級微分同相写像が C^r-構造安定ならば，C^s-構造安定であることに注意する．

次に，摂動に関する安定性についての議論の出発点となる，周期点の双曲性を定義しよう．有限次元実線型空間 V 上の線型同型 F が絶対値 1 の固有値を持たないとき，A は**双曲的**であるという．このとき，分解 $V = E^s \oplus E^u$ と，定数 $0 < \lambda < 1$, V 上のノルム $\|\cdot\|$ で，

1. $F(E^s) = E^s$, $F(E^u) = E^u$,
2. $v \in E^s$ ならば，$\|F(v)\| \leq \lambda \|v\|$,
3. $v \in E^u$ ならば，$\|F^{-1}(v)\| \leq \lambda \|v\|$

となるものが存在する．分解 $V = E^s \oplus E^u$ はただ一つに定まり，F に関する**双曲分解**と呼ばれる．多様体 M 上の C^r 級微分同相写像 f に対して，その周期点 p が**双曲的**であるとは，N をその周期としたとき，Df_p^N が双曲的な線型写像となることである．p における M の接空間 T_pM の Df_p^N に関する双曲分解を $T_pM = E^s \oplus E^u$ としたとき，E^u の次元を周期点 p の**指数**という．双曲的周期点の重要な性質はその持続性である．

定理 1. p を $\mathrm{Diff}^1(M)$ の元 f の双曲的周期点で，周期 N と指数 k を持つものとする．このとき，f に C^1 位相で十分近い g に対して，p の近くに周期 N と指数 k を持つ g の双曲的周期点 p_g が存在する．

d を M 上の距離とする．$x \in M$ に対して，集合

$$\{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \to +\infty} 0\}$$

を x の**安定集合**といい，$W^s(x)$ で表す．また，

$$\{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \to -\infty} 0\}$$

を x の**不安定集合**といい，$W^u(x)$ で表す．M が閉多様体ならば，これらは距離 d の取り方にはよ

らない．また，p が f の周期 N の周期点であるとき，$W^s(p), W^u(p)$ は f^N の不変集合である．次の定理は可微分力学系を調べる際に基本的な役割を果たす．

安定多様体定理． n を多様体 M の次元とすると，p が指数 k の双曲的周期点ならば，$W^s(p)$, $W^u(p)$ はそれぞれ $\mathbb{R}^{n-k}$ と $\mathbb{R}^k$ の C^r 級単射はめこみの像である．

閉多様体 M 上の微分同相写像 f が **Morse–Smale** 系であるとは，$\Omega(f)$ が有限個の双曲的周期点からなり，周期点 p, q に対して，$W^s(p)$ と $W^u(q)$ のすべての交わりが横断的*1)であることをいう．f が Morse–Smale 系ならば，すべての $x \in M$ について，点列 $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ は $n \to \pm\infty$ のそれぞれについてある周期軌道に収束するので，系の持つ漸近挙動は非常に穏やかである．

M 上の C^r 級 Morse–Smale 微分同相写像全体を $\mathcal{MS}^r(M)$ で表すと次が成り立つ．

定理 2. $\mathcal{MS}^r(M)$ は $\mathrm{Diff}^r(M)$ の開部分集合である．

1 節でも触れたように，Morse–Smale 系は構造安定である．

定理 3 (Palis–Smale[15])**.** Morse–Smale 系は C^1-構造安定である．

円周 S^1 上の Morse–Smale 系の位相共役類の分類はそれほど難しくない．実際，$x \in \mathbb{R}$ を代表元とする $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の元を $[x]$ と書き，整数 m と $n \geq 1$ に対して，円周上の微分同相写像 $f_{m,n}$ を

$$f_{m,n}([x]) = [x + (m/n) + (4\pi)^{-1}\sin(2\pi n x)]$$

で定めると，円周上の向きを保つ Morse–Smale 微分同相写像は，ある m, n について $f_{m,n}$ と位相共役となる．さらに，次が成り立つので，$\mathrm{Diff}^r(S^1)$ の稠密開部分集合の元が位相共役によって完全に分類されたことになる．

定理 4. $\mathcal{MS}^r(S^1)$ は $\mathrm{Diff}^r(S^1)$ の稠密開部分集合である．

単純なダイナミクスを持つ力学系は，基本的には Morse–Smale 系に限られるだろうか．複雑なダイナミクスを生むメカニズムとして知られているものの一つに，横断的なホモクリニック点がある．双曲的周期点 p に対して，p 以外の $W^s(p)$ と $W^u(p)$ の交点を p の**ホモクリニック点**といい，さらにその点で $W^s(p)$ と $W^u(p)$ が横断的に交わっているとき，**横断的なホモクリニック点**であるという．双曲的周期点 p が横断的なホモクリニック点 z を持つとき，$\{p, z\}$ の任意の近傍 U に対して，$n \geq 1$ と，U に含まれる f^n の不変閉集合 Λ で，f^n の Λ への制限が次節で述べる馬蹄力学系と呼ばれる複雑な力学系と位相共役となるものが存在することが知られており（Birkhoff–Smale の定理），この事実から f は無限個の双曲的周期点を持つことがわかる．また，横断的なホモクリニック点を持つ C^r 級微分同相写像を $\mathcal{H}^r(M)$ で表すと，双曲的周期点の持続性と安定多様体の摂動に対する連続依存性から，$\mathcal{H}^r(M)$ は $\mathrm{Diff}^r(M)$ の開集合であることもわかる．従って，$\mathcal{MS}^r(M)$ と $\mathcal{H}^r(M)$ は互いに交わらない $\mathrm{Diff}^r(M)$ の開部分集合である．これら 2 つの集合の和集合が $\mathrm{Diff}^r(M)$ で稠密になるかどうかは長年の未解決問題であったが，$r = 1$ の場合は最近肯定的に解決された．

定理 5 (Crovisier[5])**.** $\mathcal{MS}^1(M) \cup \mathcal{H}^1(M)$ は $\mathrm{Diff}^1(M)$ の稠密開部分集合である．

■ 4. 公理 A 系 ■

M が 2 次元以上の場合は，横断的ホモクリニック点を持つ微分同相写像が簡単に構成できる．従って，$\mathcal{H}^r(M)$ は空ではなく，Morse–Smale 系の全体は $\mathrm{Diff}^r(M)$ の稠密部分集合でない．では，構造安定な力学系はすべて Morse–Smale 系かといえば，そうでもない．複雑なダイナミクスを持つ

---

*1) M への単射はめこみの像 L, L' が $z \in L \cap L'$ で $T_zM = T_zL + T_zL'$ をみたすとき，z における L と L' の交わりは横断的であるという．

力学系で構造安定なものの代表例に，トーラスの双曲的自己同型がある．A を整数を成分として持つ n 次正方行列で，その行列式が 1 であるものとする．このとき，n 次元トーラス $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 上の微分同相写像 f_A を $f_A([x]) = [Ax]$ （$[x]$ は $x \in \mathbb{R}^n$ が代表する $\mathbb{T}^n$ の元）で定める．A が定める $\mathbb{R}^n$ 上の線型同型が双曲的であるとき，f_A を $\mathbb{T}^n$ の**双曲的自己同型**という．

定理 6. 双曲的自己同型 f_A は C^1-構造安定である．

トーラス上の双曲的自己同型は双曲力学系の典型例である．閉多様体 M 上の微分同相写像 f とその不変閉集合 Λ について，f が Λ 上で**双曲的**，もしくは，Λ が f の**双曲集合**であるとは，接束 TM の Λ への制限 $TM|_\Lambda$ の連続な分解 $TM|_\Lambda = E^s \oplus E^u$ と定数 $0 < \lambda < 1$, TM 上のノルム $\|\cdot\|$ で，

1. $Df(E^s) = E^s$, $Df(E^u) = E^u$,
2. $v \in E^s$ ならば，$\|Df(v)\| \le \lambda\|v\|$,
3. $v \in E^u$ ならば，$\|Df^{-1}(v)\| \le \lambda\|v\|$

となるものが取れることをいい，分解 $TM|_\Lambda = E^s \oplus E^u$ を $TM|_\Lambda$ の双曲分解という．多様体全体の上で双曲的である微分同相写像は **Anosov 系**と呼ばれる．双曲的周期点の軌道は双曲集合であり，トーラス上の線型自己同型 f_A は Anosov 系である．後者の双曲分解としては，A に関する $\mathbb{R}^n$ の双曲分解から自然に誘導される $\mathbb{T}^n$ の接束の分解を取ればよい．

これら以外の双曲集合の例として，Smale による**馬蹄力学系**がある（図 1）．$R_0 = [0,1] \times [0,1/3]$, $R_1 = [0,1] \times [2/3,1]$ とし，$\mathbb{R}^2$ 上の微分同相写像 f_{H} を $(x,y) \in R_0$ のとき $f_{\mathrm{H}}(x,y) = (x/3, 3y)$, $(x,y) \in R_1$ のとき $f_{\mathrm{H}}(x,y) = (1-x/3, 3(1-y))$ となるものとする．$\Lambda_{\mathrm{H}} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f_{\mathrm{H}}^n(R_0 \cup R_1)$ とすると，Λ_{H} は f_{H} の双曲集合である．実際，E^s を x 軸方向，E^u を y 軸方向とすれば，$TM|_{\Lambda_{\mathrm{H}}} = E^s \oplus E^u$ が Λ_{H} 上の双曲分解となる．馬蹄力学系の振舞いは**記号力学系**を通して理解できる．

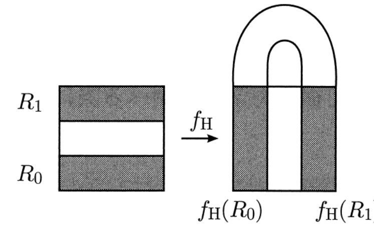


図 1 馬蹄力学系．

Σ_2 を数列 $(\xi(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ で各 $\xi(n)$ が 0 または 1 であるようなもの全体としよう．この空間には離散空間 $\{0,1\}$ の積集合として積位相が入る．Σ_2 上の**シフト** σ を，$\sigma((\xi(n))_{n\in\mathbb{Z}})(m) = \xi(m+1)$ で定めると，σ は Σ_2 上の同相写像となる．このとき，f_{H} の Λ_{H} への制限と σ の間の位相共役写像 $h : \Lambda_{\mathrm{H}} \to \Sigma_2$ を，$f_{\mathrm{H}}^n(x,y) \in R_0$ のとき $h(x,y)(n) = 0$, $f_{\mathrm{H}}^n(x,y) \in R_1$ のとき $h(x,y)(n) = 1$ として構成できる．この位相共役を通して，Λ_{H} 上の f_{H} のダイナミクスに関する多くの情報を σ のそれから得ることができる．例えば，Σ_2 に属する数列で周期的なものは σ の周期点であり，そのようなものは Σ_2 で稠密なので，このことから f_{H} の周期点が Λ_{H} において稠密に存在することがわかる．

馬蹄力学系は複雑な振舞いをする力学系に普遍的に現れるものである．実際，前節でも述べたように，Birkhoff–Smale の定理により，横断的なホモクリニック点の存在は系のある反復合成における馬蹄力学系の存在を導く．また，2 次元 C^2 級微分同相写像の場合には，位相的エントロピーと呼ばれる力学系の複雑さを定量的に計る量が正であれば，系の反復合成が馬蹄力学系を持つことが，Katok[9] によって示されている．

周期点に対する安定多様体定理の類似が双曲集合に対して成り立つ．

安定多様体定理． f を多様体 M 上の C^r 級微分同相写像とし，Λ を f の双曲的な閉不変集合とする．k, l をそれぞれ E^s, E^u のベクトル束としての次元とすると，$x \in \Lambda$ に対して $W^s(x)$, $W^u(x)$ はそれぞれ $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^l$ の C^r 級単射はめこみの像である．

f の構造安定性を $\Omega(f)$ の双曲性によって特徴づける次の定理は，可微分力学系の理論の一つの到達点とも言える結果である．

定理 7 (C^1-安定性定理)．C^1 級微分同相写像 f が C^1-構造安定であることと次の 2 つの条件をみたすことは同値．

1. $\mathrm{Per}(f)$ の閉包が $\Omega(f)$ と一致し，f は $\Omega(f)$ 上で双曲的．(**公理 A**)
2. $p,q \in \Omega(f)$ と $z \in W^s(p) \cap W^u(q)$ に対して，$T_zM = T_zW^s(p) + T_zW^u(q)$．(**強横断性**)

Morse–Smale 系とトーラス上の双曲自己同型は，公理 A と強横断性をみたすことに注意しよう．公理 A と強横断性から構造安定性への方向は，Smale[25], Robbin[19], Robinson[20]によって証明され，逆方向は三波[22]，Liao[11]による 2 次元の場合の結果を経て，Mañé[12]によって証明された．Pugh による次の定理から，$\mathrm{Diff}^1(M)$ の generic な元[*2]は公理 A の $\mathrm{Per}(f)$ に関する条件をみたすため，公理 A の本質的な部分は $\Omega(f)$ の双曲性である．

Pugh の一般稠密性定理[17]．$\mathrm{Diff}^1(M)$ の generic な元について，$\mathrm{Per}(f)$ の閉包は $\Omega(f)$ と一致する．

5. 非双曲力学系の分類を目指して

$\mathrm{Diff}^r(M)$ の中で公理 A をみたすものは稠密だろうか．残念ながら，多様体 M が 2 次元以上のときには，ほとんどの場合そうではないことがすでに知られている．その証明は，公理 A 系では起き得ない現象が稠密に起きる $\mathrm{Diff}^r(M)$ の開集合を構成することでなされる．まず，それらの現象がどんなものであるかを見ることにしよう．

微分同相写像 f の双曲的周期点 p が**ホモクリニック接触**を持つとは，p のあるホモクリニック

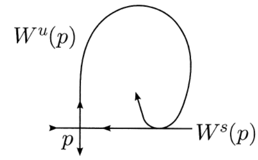


図 2　ホモクリニック接触．

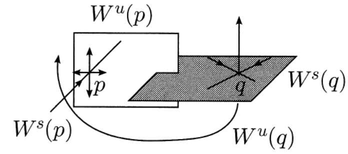


図 3　異指数サイクル．

点 z での $W^s(p)$ と $W^u(p)$ の交わりが横断的でない，すなわち，$T_zM \neq T_zW^s(p) + T_zW^u(p)$ であることをいう（図 2)．双曲的周期点 p,q が**異指数サイクル**[*3]を持つとは，p と q の指数が異なり，$W^s(p)$ と $W^u(q)$，$W^u(p)$ と $W^s(q)$ がそれぞれ交わることをいう（図 3)．

ホモクリニック点や，異指数サイクルにおける $W^s(p)$ と $W^u(q)$, $W^u(p)$ と $W^s(q)$ の交わりは $\Omega(f)$ に属することが知られており，その帰結として，ホモクリニック接触や異指数サイクルを持つ系が公理 A をみたさないことがわかる．

ホモクリニック接触を持つ双曲的周期軌道が存在する C^r 級微分同相写像全体を $\mathcal{HT}^r(M)$，異指数サイクルを持つものの全体を $\mathcal{HC}^r(M)$ と書く．$\mathrm{Diff}(M)$ の部分集合 X に対して $\overline{X}$ でその C^r 位相に関する閉包を表すものとする．次の結果から，ホモクリニック接触や異指数サイクルを持つ系は豊富に存在する．

定理 8 (Newhouse[13])．M が 2 次元以上，$r \geq 2$ のとき，$\overline{\mathcal{HT}^r(M)}$ は内点を持つ．

定理 9 (Abraham–Smale[1], Simon[24], 浅岡[2])．M が 3 次元以上，$r \geq 1$ のとき，$\overline{\mathcal{HT}^r(M)}$, $\overline{\mathcal{HC}^r(M)}$ は内点を持つ．

2 次元では $\mathcal{HC}^r(M)$ は空集合であることに注

*2) $\mathrm{Diff}^r(M)$ の稠密開部分集合の可算族 $\{\mathcal{U}_i\}$ で，$\cap_i \mathcal{U}_i$ に属する元がすべてある性質 P をみたすとき，**generic** な元は P をみたす，という．

*3) heterodimensional cycle．決まった訳語はまだないようである．

意しよう．また，定理9に含まれない M が2次元で $r=1$ の場合は，未解決問題として残されている．

ホモクリニック接触や異指数サイクルは具体的に書ける半局所的モデルを持ち，そのモデルを用いて分岐を調べることができる（例えば，ホモクリニック接触については，Palis–Takens の教科書[16]が詳しい）．Palis は次の予想を提出し，ホモクリニック接触と異指数サイクルの解析を通じて非双曲的力学系のダイナミクスを理解することを目指す，いわゆる **Palis のプログラム**を提唱した．

Palis 予想． $\mathrm{Diff}^r(M)$ の元で公理 A をみたさないものの全体を $\mathcal{A}^r(M)$ と書くと，$\mathcal{A}^r(M) \cup \mathcal{HT}^r(M) \cup \mathcal{HC}^r(M)$ は $\mathrm{Diff}^r(M)$ の稠密部分集合となる．

この予想は，2 次元 C^1 級の場合には解決されている．

定理 10 (Pujals–Sambarino[18])．M が 2 次元閉多様体のとき，$\mathcal{A}^1(M) \cup \mathcal{HT}^1(M)$ は $\mathrm{Diff}^1(M)$ の稠密部分集合である．

ただし，上でも述べたように，2 次元の場合は，$\overline{\mathcal{HT}^1(M)}$ が内点を持つかどうかは定かではない．高次元に関しては，$\mathcal{HT}^1(M) \cup \mathcal{HC}^1(M)$ から離れたところでは，f が $\Omega(f)$ 上で部分双曲性と呼ばれる弱い形の双曲性を持つことが，最近 Crovisier[6] によって証明されている．

6. 普遍力学系

ホモクリニック接触と異指数サイクルから生じる分岐現象を調べれば，大部分の力学系がわかるだろうというのが Palis のプログラムだったが，分岐として生じるダイナミクスの中には理解を拒むようなものもあることが最近明らかになってきた．

$\mathrm{Emb}_0^r(D^n)$ で，n 次元閉球体 D^n からそれ自身への向きを保つ C^r 級埋め込み全体を表すことにする．n 次元閉多様体 M 上の C^r 級微分同相写像 f が **C^r-普遍力学系**であるとは，M への D^n の C^r 級埋め込みの族 $(\phi_j)_{j\geq 1}$ と自然数列 $(m_j)_{j\geq 1}$ で次をみたすものが存在することを言う：

1. すべての j について，$f^{m_j}(\phi_j(D^n)) \subset \phi_j(D^n)$ である．
2. $\mathrm{Emb}_0^r(D^n)$ の元 F_j を $F_j = \phi_j^{-1} \circ f^{m_j} \circ \phi_j$ で定めると，$\{F_j \mid j \geq 1\}$ は $\mathrm{Emb}_0^r(D^n)$ の稠密部分集合である．

言うならば，普遍力学系とは球体上のすべての微分同相写像を近似できるような力学系である．

多様体が 3 次元の場合には C^1-普遍力学系が豊富に存在する．

定理 11 (Bonatti–Diaz[4])．M が 3 次元であるとき，$\mathrm{Diff}^1(M)$ の開集合 $\mathcal{U}$ で，その中の generic な微分同相写像が C^1-普遍力学系であるようなものが存在する．

また，Turaev[26] により，$r \geq 2$ に対して，2 次元多様体上の C^r 級微分同相写像 f がいくつかの自然な仮定をみたすホモクリニック接触を持てば，f を閉包に含むような $\mathrm{Diff}^r(M)$ の開部分集合で，そこでは C^r-普遍力学系が generic であるようなものが存在するという結果もアナウンスされている．

7. 終わりに

普遍力学系が豊富に存在することが明らかになったことにより，Morse–Smale 系，公理 A 系，ホモクリニック接触や異指数サイクル，と次第に拡大してきた「理解可能なもの」による力学系の分類に向けた努力も究極の壁にぶつかってしまった感がある．最近の研究では，普遍力学系のようなワイルドな現象を生み出すメカニズムを特定することで，理解可能な力学系の境界を明らかにしようとする方向と，より双曲力学系に近い部分双曲系を詳しく調べる方向があるように筆者には見える．こうした最近の動向を知りたい読者には，Bonatti による論説[3]を読むことを勧める．

本稿で見てきた分類に関する結果の多くは C^1

位相に関するものであり，同様の結果が $r \geq 2$ に対する C^r 位相でも成り立つことが期待されてはいるものの，証明への手掛かりはほとんどない．また，双曲力学系は完全に理解されているかといえば実はそうでもなく，その大域構造となると低次元の場合を除いてほとんどわかっていない．例えば，Anosov 系微分同相写像の分類問題も，冪零多様体上のものや，E^u が 1 次元のものの分類がなされた 1970 年代以降，これといった進展がないままである．

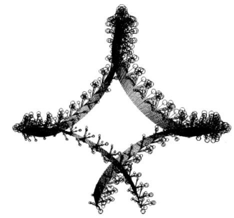
結局のところ，力学系は「よくわからないもの」であり続けるのかもしれない．しかし，その中から少しずつではあっても「わかるもの」を取り出そうという努力はこれまでに多くの重要な概念や結果を生み出してきたし，今後もそうであろうと筆者は思っている．

参考文献

1) R. Abraham and S. Smale, Nongenericity of Ω-stability, Global Analysis, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 5–8.
2) M. Asaoka, Hyperbolic sets exhibiting C^1-persistent homoclinic tangency for higher dimensions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), no.2, 677–686.
3) C. Bonatti, Survey: Towards a global view of dynamical systems, for the C^1-topology, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31** (2011), no.4, 959–993.
4) C. Bonatti and L. Diaz, On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **No.96** (2003), 171–197.
5) S. Crovisier, Birth of homoclinic intersections: a model for the central dynamics of partially hyperbolic systems, *Annals of Math.*, **172** (2010), 1641–1677.
6) S. Crovisier, Partial hyperbolicity far from homoclinic bifurcations, *Adv. Math.*, **226** (2011), no.1, 673–726.
7) J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **158** (1971), 301–308.
8) S. Hayashi, Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12** (1992), no.2, 233–253.
9) A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **No.51** (1980), 137–173.
10) A. Katok and B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, **54**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
11) S.T. Liao, On the stability conjecture, *Chinese Ann. Math.*, **1** (1980), no.1, 9–30.
12) R. Mañé, A proof of the C^1 Stability Conjecture, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **66** (1987), 161–210.
13) S.E. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **No.50** (1979), 101–151.
14) J. Palis, Open questions leading to a global perspective in dynamics, *Nonlinearity*, **21** (2008), no.4, T37–T43.
15) J. Palis and S. Smale, Structural stability theorems, *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math.*, **Vol.XIV**, Berkeley, Calif., 1968), pp.223–231 Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
16) J. Palis and F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Fractal dimensions and infinitely many attractors*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
17) C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 1010–1021.
18) E. Pujals and M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms: A conjecture of Palis, *Annals of Math.*, **151** (2000), 961–1023.
19) J.W. Robbin, A structural stability theorem, *Annals of Math.*, **94** (1971), 447–493.
20) C. Robinson, Structural stability of C^1 diffeomorphisms, *J. Differential Equations*, **22** (1976), 28–73.
21) C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos. Second edition. Studies in Advanced Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
22) A. Sannami, The stability theorems for discrete dynamical systems on two-dimensional manifolds, *Nagoya Math. J.*, **90** (1983), 1–55.
23) M. Shub, *Global stability of dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 1987.
24) C.P. Simon, A 3-dimensional Abraham-Smale example, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **34** (1972), 629–630.
25) S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.
26) D. Turaev, Maps close to identity and universal maps in the Newhouse domain, preprint, ArXiv: 1009.0858

（あさおか・まさゆき，京都大学大学院理学研究科）

分類理論のあり方



小澤　登高

ヒトは分類好きな生き物である．太古の昔に狩猟採集生活をしていたころ以来，何が食べられるのか，いかに処理をすればよいのか知ることはもちろん重要なことであっただろう．また，薬となる動植鉱物をその効果で分類し，それを伝えていくことも重要であったに違いない．こうした分類理論は，東洋においては人間にとっての有用性に重点を置いた本草学として発展したが，西洋においては，人間の役に立つかどうかとは係わりなく，自然界に存在するものすべてを系統的に分類する博物学として発展していった．「博物学」というのは，英語の「Natural history」の訳語として明治期に作られたものだそうである．どちらの場合も，通常の手段では手に入らない珍しいものをありがたがることが多かったようだ．人類の分類にかけるこうした情熱に鑑みれば，数学研究においても全研究の少なからぬ割合が何らかの意味での分類理論であることも納得できる．さらに言えば，数学研究とは数学的事実を列挙記述しようとする営みであるのだから，分類理論の目的がしばしば分類そのものであることももっともである．

アインシュタインは「この世界について最も理解しがたいことは，それが理解可能であるということだ」と言ったが，私はヒトがどうして数学を理解できるのかについて興味を持っている．ヒトの基本構造は何万年も前から変わっていないそうであるが，そうであるのなら当時，数学を理解できることに何らかの生存競争上のメリットがあったということになろう．既に述べた分類に対する情熱のほか，位置関係を把握する幾何学的能力，（多分言語運用に関連して）抽象的なシンボルを操作する代数学的能力，そして緻密な計量を行う解析学的能力など，確かに役に立ちそうである．私たちは原始の時代に獲得したこうした能力を流用することによって数学を理解しているのだと思う．ひょっとしたら数学の諸分野が大雑把に幾何学，代数学，解析学と分類できるのは，利用する能力に進化の過程で別々の起源があるからかもしれない．もし宇宙人が存在したら，その数学は我々の数学とは質的に異なっているのかもしれない．宇宙人はともかく，電子頭脳が産み出す数学ならば，私が生きているうちに見ることができるのだろうと思う．数学研究は将棋やチェスのようなルールと目的のはっきりしたゲームとは本質的に異なるが，既に将棋やチェスの世界では電子頭脳が，ヒトならば直感的に悪手として即座に捨ててしまう手の中からも妙手を見つけ出してくるそうである．

こうしてとりとめもなく考えるに，数学という学問が極めて大きな多様性を持ちながらも，同時に統一感を保っているのが不思議なくらいで，数学者が分野により得手不得手があるのも当然のことなのであろう．例えば私は，出会った当初から位相幾何学が苦手であった．いくら学んでも自分に浸透して来る気がしなかったものだ．現在ではもちろん位相幾何学とは直接関係ない分野を研究しているのだが，たまに係わらなければならないホモロジーの概念は今も全く理解できていない．ただ道具として必要次第で使う程度である．そういえばフォンノイマンは「数学とは理解するものではない．慣れるものだ」と言っていた．

冒頭ではああ述べたが，実は私は「分類理論」も苦手である．分類理論は特定の分野ではないので，

苦手というよりは単に嫌いであると言ったほうが正しい．一口に分類理論と言っても，対象を特徴によって大雑把に類別するものから，対象に固有のラベル（完全分類不変量）を貼ることによって完全目録を作るようなものまで多様である．標準形やそれを求めるアルゴリズムを研究することもある．これら分類理論のうちで私が苦手とするのは，完全目録を作ろうという考え方そのものである．そうしたことが重要であるし，役に立つことも間違いないが，サプライズこそ数学の生命力の源だと信じている私には，このカタログに載っているものがすべてですなどと言われると，何だかつまらなく思えてしまうのだ．そういえば私は整理整頓が苦手だ．もっとも私の散らかった研究室には，カビたお菓子がたまに発掘される程度で，何のサプライズもありはしないのだが．

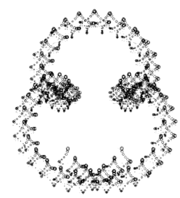
前置きがずいぶんと長くなってしまったが，本題の分類理論に関する最近の話題にひとつ触れたい．有限生成アーベル群の分類定理は群論の初年度で習う基礎定理であるが，同定理によれば特に，捩れのない有限生成アーベル群 A は，自由アーベル群 $\mathbb{Z}^d$ に同型である．つまり，捩れのない有限生成アーベル群はその階数で分類できる．以下アーベル群といったらすべて捩れのないものを考えることとし，アーベル群 A の階数は $\mathbb{Z}$ 上線形独立な元の集合の最大個数として定義されるものとする．では，有限生成とは限らない有限階数アーベル群 A はどのようにしたら分類できるのだろうか．階数が 1 のとき，即ち $A \hookrightarrow \mathbb{Q}$ のときは 1937 年にベールが以下のように解決している．任意の元 $x \in A$ に対してその特性関数 $h_x \colon \{素数\} \to \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ を

$$h_x(p) = \sup\{n : A \text{ において } x \text{ は } p^n \text{ で割り切れる}\}$$

として定義する．このとき，A の階数が 1 であることから，0 でない勝手な元 $x, y \in A$ に対して，$h_x(p) \neq h_y(p)$ となる素数 p は有限個しかないこと，またそのときの特性関数の値は両方とも有限であることが分かる．この 2 条件をもって関数 h_x と h_y は同値であるといい $h_x \sim h_y$ と書くことにする．つまり，特性関数 h_x 自体は $x \in A \setminus \{0\}$ の選び方に依存するが，その同値類は A の不変量となっている．この同値類がさらに完全不変量であるというのがベールの分類定理である．即ち，階数が 1 のアーベル群 A と B とが同型であるための必要十分条件は，0 でない元 $x \in A$ と $y \in B$ をとってきたとき，$h_x \sim h_y$ となることである．ここで，分類のための不変量が，特性関数という実態のはっきりしたものではなく，特性関数の同値類というあやふやな形をしていることに注目してほしい．実際，具体的な特性関数が 2 つ与えられたとき，それらが同値であるか否かを判定することは完全には容易でない．ベールの定理はすぐに階数が 2 以上の場合にも拡張されたが，事態はさらに悪化し，特性関数は数列に替わって行列の列となり，特性関数の間の同値関係は極めて複雑なものとなってしまった．つまり，特性関数が同値であるか否かを判定するのが，もとの群が同型であるか否かを判定するのと同程度に難しくなってしまったのである！ それ以来 75 年経ったが，その間の多くの努力にもかかわらず，簡潔な分類定理（あるいは有効な分類手段）は見つかっていない．しかしつい最近になって，そのようなものが実は存在しないことが分かってきた．最近の記述的集合論の発展により，ある数学的対象（ここでは階数 2 のアーベル群）を分類するための「計算可能」な不変量は，その対象の間の同型関係と同程度以上に複雑な形を持つ必要がある，という言われてみれば当り前のことが数学的に厳密な意味で成り立つことが分かったのである．もちろん，階数 2 のアーベル群全体の「集合」から実数への写像 F で $A \cong B \Leftrightarrow F(A) = F(B)$ となるものは存在するが（濃度の比較と選択公理による），このような完全不変量 F は決して「計算可能」にはならないのである．

（おざわ・なるたか，京都大学数理解析研究所）

統計物理学における分類



笹本　智弘

1. はじめに

分類するということは，日常生活においても学問においても至る所に見られる基本的な作業である．対象が多種多様な際に，何らかの性質に基づいて「仲間」ごとにまとめておくと知識が整理されて何かと便利だというのがその基本的な理由なのではないかと思われる．

例えば食品に含まれる栄養素を炭水化物，脂質，たんぱく質，無機質，ビタミンの５つに分類しておけば，どんな食事を食べた際も（学食のカフェテリアでいろいろな総菜を選んだ場合も寿司だけ食べた場合も）どのような栄養素を摂取したかは5分類に照らしてそれなりに把握ができ，バランスの良い食生活を送るのに有用である．

生物全体を植物と動物に分類するとか，脊椎動物全体を魚類，両生類，は虫類，鳥類，ほ乳類に分類するというのも，思考の節約にどれだけ役立っているか計り知れない．アンフューマという生物の名前は聞いたことがなくても，それが両生類の一種だと知れば，おそらく陸上と水中の両方に住んでいる変温動物で，カエルやイモリの仲間なのだろうと想像することはできるわけである．

分類を行う際は何らかの性質に基づいて区別をするわけであるが，その境界がそれほどはっきりしない場合も多い．生物と無生物という分類なども，普段は別のものと考えているが，よく考えると境界はそれほどはっきりしていない例であろう．これに対して数学における分類は，定義によって境界が明確にされ，曖昧さがないのが特徴である．偶数とも奇数ともいいかねる微妙な自然数というものは存在しないのである．

さらに数学における分類においては，対象を適当に制限した場合，それらの対象を何らかの性質によって完全に「分類しきる」ことができる場合がある．そのような中でも特に印象的なものの一つは，単純リー群の分類ではないだろうか．リー群はある種の条件を満たす行列の集合などとして現れ，物理においても対称性の記述にたびたび登場するが，それらに完全な分類理論が存在するということは大変強力なことである．すべての単純リー群を調べるには，A から G までの９つの類を調べれば済むことがあらかじめ分かっているというのは，驚くべきことである．分類学における理想的な形といえるであろう．

統計物理学は，多自由度の系を扱う学問体系である．伝統的な統計物理学においては，主として（熱）平衡系を扱うのであるが，そこでの中心的な課題の一つは，相転移現象の記述である．水（液体）を冷やしていくと氷（固体）になるとか，温めていくと水蒸気（気体）になるというのは相転移の典型例であるが，それ以外にも磁石を温めていくと磁石の性質を失うとか，金属–絶縁体転移とか，いろいろな例がある．

相転移は，多種多様な系において起こるものであるが，相転移が起こっているときの性質は，多く

の系で共通であるという著しい性質がある．これを普遍性という．そうすると，世の中に数多ある相転移を，同じ普遍的な性質をもったもので分類し，あわよくばそれを分類しきってしまおう，という考えが浮かんでくるであろう．

このようなアイディアはこれまですでにある程度の成功を収めているが，まだまだ完成からはほど遠い．以下では，ランダムウォークの例で普遍性の基本的な考え方を説明したあと，平衡統計力学における成功例，さらに非平衡統計力学における一つの事例について述べていく．

2. ランダムウォークと中心極限定理

まず，1次元のランダムウォークを考えよう．これは以下のようなものである．1次元格子上に一つの粒子があり，時刻 $t=0$ での位置を原点 $x=0$ とする．その後時刻 t で粒子が位置 x にいたとすると，次の時刻 $t+1$ には右隣（位置 $x+1$）または左隣（位置 $x-1$）の格子点に各々確率 $1/2$ で移動する．ルールが確率的であるから，時刻 t で粒子がいる位置 $X(t)$ もランダムとなる．粒子が時刻 t で位置 x にいる確率は，

$$\mathbb{P}[X(t)=x]=\frac{1}{2^t}\binom{t}{(x+t)/2} \tag{1}$$

で与えられる．

時刻 t が大きいときの粒子の位置の分布を考える際には，この表式においてスターリングの公式 $n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$ を用いることができる．その結果，

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\left[\frac{X(t)}{\sqrt{t}}\leq s\right]=\int_{-\infty}^{s}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \tag{2}$$

が成り立つ．右辺に現れているのは，正規分布（ガウス分布）の累積分布関数である．

中心極限定理によれば，正規分布は有限の分散を持つ独立な確率変数の個数が大きいときその和の分布を記述するのに「いつも」現れる．

[中心極限定理]

$X_i\ (i=1,2,\ldots)$ を独立な確率変数とし，平均 $\langle X_i\rangle=\mu$，分散 $V(X_i)=\langle(X_i-\langle X_i\rangle)^2\rangle=\sigma^2$ が i に依らず有限であるとする（ただし $\langle\cdots\rangle$ は確率変数の期待値を表す）．このとき $X(t)=\sum_{i=1}^{t}X_i$ について次が成り立つ：

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\left[\frac{X(t)-\mu t}{\sqrt{\sigma^2 t}}\leq s\right]=\int_{-\infty}^{s}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx. \tag{3}$$

上のランダムウォークにおいて，時刻 i で粒子が右隣の格子点に移動するとき $X_i=1$，左隣の格子点に移動するとき $X_i=-1$ となる変数 X_i $(i=1,2,\ldots)$ を考えると，X_i は独立で各々パラメータ $1/2$ のベルヌイ分布に従う確率変数

$$\mathbb{P}[X_i=1]=\frac{1}{2},\ \ \mathbb{P}[X_i=-1]=\frac{1}{2} \tag{4}$$

であり，各々の平均，分散は $\langle X_i\rangle=0, V(X_i)=1$ と計算される．時刻 t でのランダムウォークの位置 $X(t)$ は $\sum_{i=1}^{t}X_i$ にほかならないから，(2) は中心極限定理の特別な場合といえる．

中心極限定理のすごいところは，X_i の分布の実際の形について何も要求していないことである．X_i 各々の平均と分散が有限であるという制限はあるが，それ以外はどんな分布でもよく，幾何分布でもベータ分布でも，何でもよい．それでも t を無限とする極限では必ず正規分布が現れるというのである．このように，多様な対象が何らかの共通の性質を示す場合に，普遍性があるという．

中心極限定理において，普遍的な対象であるところの正規分布は，$t\to\infty$ の極限をとって初めて現れることに注意しておこう．統計力学において普遍性が現れるのは，系の構成要素の数が事実上無限大であることが関係している．ランダムウォークの例では系の構成要素は一つしかないが，t という時間パラメータを無限大とすることによって普遍性が現れている．

ただ，中心極限定理における普遍性は非常に強力で，この設定ではいつでも正規分布が出てくるということなので，これ以上分類することは何もない．

3. レヴィウォークと安定分布

今度は，確率変数 X_i の独立性を保ちつつ，分散の存在を仮定しない場合を考えよう．ランダムウォークの言葉でいえば，1時間ステップでの左右への移動が長距離に及ぶ場合に相当する（レヴィウォーク）．このような場合，もちろん中心極限定理は使えなくなるが，それでも $X(t)=\sum_{i=1}^{t} X_i$ は t が大きい状況で普遍的な性質を示すと考えられるであろう．実際，1時間ステップごとの移動が左右対称で，移動量 x の確率分布 $p(x)$ が x が大きいときベキ指数 α（ただし $0<\alpha<2$）のベキのように振る舞う場合（$p(x)\sim 1/x^{\alpha+1}$），$X(t)$ の $t\to\infty$ での揺らぎを表す分布は指数 α の安定分布と呼ばれる分布となることが知られている（$\alpha\to 2$ の極限で安定分布は正規分布となる）．この場合も確率分布 $p(x)$ の性質としては x が大きいときのベキ的振舞いの指数のみで極限に現れる分布が決まってしまうという普遍性がある．

このような状況を（少し不正確であるが），「独立な確率変数の和が従う分布の極限は，α というパラメータで「分類」することができる」というようにいってもよいであろう．独立な確率変数の和を考えているような状況においては，t が大きいときそれが従う分布は安定分布であることが既にわかっていて，何らかの方法で指数 α を見つけることができれば，その正体が分かったことになるのである．

4. 平衡相転移における普遍性

物理学においては，系のミクロな状態が与えられたときにそのエネルギーを指定するハミルトニアン H が重要な役割を果たす．簡単な例として，2次元格子上の各格子点 i 上に $s_i=\pm 1$ という2つの値のみを取る変数（スピン）がある状況を考えることができる．そのハミルトニアンが

$$H=-J\sum_{\langle i,j\rangle} s_i s_j \qquad (5)$$

で与えられるとしよう．ただしここで $\langle i,j\rangle$ に関する和は2次元格子上のすべての隣接格子間に関して取るものとする．$J>0$ とすると，s_i が同じ値を取るほどエネルギーが低くなるような系を表している．これを(強磁性)イジングモデルという．

平衡系の統計力学においては，ハミルトニアン H が与えられたとき，ミクロ状態が実現する確率はギブス分布

$$\frac{1}{Z}e^{-H/(k_{\mathrm{B}}T)} \qquad (6)$$

で与えられる．ただし k_{B} はボルツマン定数，T は温度である．また Z は分配関数と呼ばれる規格化定数であるが，これから $F=k_{\mathrm{B}}T\log Z$ で定義される量は自由エネルギーと呼ばれ，系の熱力学的性質に関する情報を集約している．確率をこのように指定した上で，期待値で表される相関関数 $\langle s_i\rangle$, $\langle s_i s_j\rangle$ 等を考えることができる．上記のイジングモデルにおいて温度を十分高くしておくと，$\langle s_i\rangle=0$ である．しかし高温の状況から温度を徐々に下げていくと，ある特別な温度 $T_{\mathrm{C}}(>0)$ があり，それ以下の温度では $\langle s_i\rangle\neq 0$ となる．これは相転移現象の一種である．$T>T_{\mathrm{C}}$ においてはスピンの向きが格子点によってバラバラのため，期待値としては $\langle s_i\rangle=0$ となるが，$T<T_{\mathrm{C}}$ ではスピンの向きが巨視的に揃い，$\langle s_i\rangle\neq 0$ となるのである．これは磁石のモデルと考えることができる．また T_{C} を転移温度という．

ここで，相転移は数学的には系の自由度（イジングモデルでいうとスピンの数）が無限大になったときに初めて起こるということを注意しておこう．系の自由度が有限である限りは自由エネルギーも種々の物理量もすべて温度に関して滑らかな関数である．系の自由度が無限になって初めて，相転移は物理量に特異性が現れるという特徴で捉えることができるのである．

相転移は，この特異性の現れ方によって分類をすることができる．特に自由エネルギーを温度の関数と見た場合，その何回微分が相転移点で不連続となるかで，大雑把に分けることができる．固体–液体–気体といった転移熱を伴う状態変化は1次相転移の代表例である．一方上記のイジングモ

デルにおける相転移は転移熱を伴わず，2次相転移の例となっており，その特異性は，比熱や2点関数に現れる指数に特徴的に現れる．例えば，イジングモデルでは低温側から温度を上げていった場合に磁化は $\langle s_i \rangle \sim (T_{\mathrm{C}} - T)^{1/8}$ のように振る舞うことが知られている．この場合1/8という数字は，磁化がどれくらい速く0に近づくかを表しており，臨界指数と呼ばれる．

相転移現象において興味深いのは，この臨界指数が多くの系において共有され，ロバストなものであるということである．例えばある種の鉄や銀を含む物質に見られる磁化の特異性には1/8という指数が見出される．イジングモデルは上記のような極々単純なモデルであり，一方現実の物質を構成する原子たちの相互作用ははるかに複雑であるということを考えると，これは驚くべきことのように思えるが，これこそは（2次）相転移現象において強力な普遍性が成り立っているということにほかならない．中心極限定理において，各 X_i の分布が何であれ，平均と分散が有限でありさえすればいつでも指数1/2と正規分布が現れたように，相転移現象においても，ハミルトニアンの具体的な形はかなり違っていても，その次元，成分数，対称性等基本的な性質を共有するものはすべて同じ指数や分布を示し，一つの普遍性クラスをなす，と考えられている[1]．

中心極限定理の場合との大きな違いは，相転移の場合は系の構成要素が独立でなく，ハミルトニアンで記述される相互作用を持っていることである．このような非独立な要素たちが普遍性を示すメカニズムは，Wilsonのくりこみ群により概念的に説明されるのであるが，項数の都合もありここではこれ以上は立ち入らないことにする．いずれにせよ，ここにきて我々は相転移現象における普遍性クラスの分類，つまり，系がどのような臨界現象を示し得るかに関して分類表を作ることができるか，という課題に直面する．そのようなことがもし可能であれば，いくつかの指数を観測・計算することにより，その臨界現象についてすべて理解できることになるであろう．

5. 2次元等方的臨界現象の分類

2次相転移に伴って現れる臨界現象を分類するということは，残念ながら一般には極めて難しいプログラムと考えられている．しかし2次元の等方的臨界現象については，完璧な分類理論が存在する[2~5]．2次元において2次相転移を示す系というのはたくさんの例が知られており，上記のイジングモデルはその代表例の一つであるが，それ以外にもポッツモデル，パーコレーション等，多種多様な臨界現象が存在する．これらの系が相転移の際に共通に示す性質として，平行移動，回転，引き延ばし（スケール変換）に対する不変性がある．実はある程度の条件の下で，これらに関する不変性を持つ系は共形変換に対する不変性を持つことを示すことができる．そして，2次元においては共形変換に関する不変性はVirasoro代数と呼ばれる代数によって統制される無限次元の対称性となる．そうすると2次元の等方的臨界現象の分類はVirasoro代数の表現の分類という問題に帰着されることになるが，これが実行可能なプログラムとなっているのである．

実際に共形場理論の分類表ではイジング普遍性クラスを初めとして可能なクラスが列挙され，どのような物理量がどのような指数を示すかということが詳しく調べられている．

であるから，2次元の平衡相転移に関する研究を行う際には，実験と比較する場合も，モデルで理論的に調べる場合も，いくつかの指数を測定・計算することによって，系の普遍性クラスが同定され，あとはその普遍性クラスの性質がどこまで理解されているか，という問題になる．

6. ランダム行列における普遍性

独立ではない要素たちが示す普遍性の例として，ランダム行列についても少し述べておこう[7]．ランダム行列とは，要素がランダムであるような行列のことである．そこに現れる行列を量子力学系のハミルトニアンと見なすことにより，ランダム

行列の固有値の統計を調べることは，原子番号の大きい原子の原子核やランダムネスのある物性系のエネルギー準位の研究に有用となる[6]．

そのような事情もあってか，ランダム行列の理論においては，特にその固有値の確率的な性質に興味を持つ場合が多い．もちろん一般的なランダム行列においてその固有値の性質を議論することは容易ではない．しかし，ガウシアンアンサンブルと呼ばれる特別なランダム行列においてはそのような量を詳しく調べることができる．このアンサンブルにおいては，行列要素は基本的に独立で正規分布に従うとするのであるが，固有値に着目すると，それらは独立ではなくなり，非自明な相互作用が入る．

さらに行列のサイズが無限大の極限を考えることができて，例えば隣接する固有値の間隔分布のような量に対して具体的な表式を得ることができる．このように自由度が無限大となる極限で得られる量は，これまでの議論と同様，普遍的な性質を持っていると考えられるであろう．実際，隣接する固有値の間隔分布などは，種々の現実の系に広く見られているし，また，数学的にもかなり広いクラスのランダム行列アンサンブルに対して同じ分布が得られることが証明されている．

そうするとランダム行列がそのサイズが無限大になったときに示す性質の普遍性の分類ということが気になってくる．この場合にもいろいろな分類が考えられるが，まず重要なものは，ランダム行列がエルミートか実対称であるかという区別であり，上記の隣接する固有値の間隔分布にも違いが現れる．これは量子力学系への応用では，系が時間反転対称性を持つかどうかという違いに対応すると考えられ，実際磁場の有無によってそのような量の違いが見られることが確認されている．

ランダム行列においては，もちろん固有値の間隔以外の量に着目することも可能であり，例えば最大固有値の確率的性質を考えることができる．この場合も行列サイズが無限大の極限をとることにより，やはりいくつかの分布が得られ，それらは普遍的なものであると考えられている．またこの場合は，行列がエルミートか実対称かだけではなく，0 エネルギーに関する対称性のある系も考えることができ，関係するランダム行列の分類に単純リー群の分類と同様な分類方法が有用であることが知られている．

7. KPZ 普遍性

今度は，1 次元的な界面が成長する状況を考える．空間方向を x で表すと，時刻 t，位置 x における界面の高さを $h(x,t)$ で表すことができる．ここで問題とするのは，適当な実験，もしくは適当な成長のルールを与えたシミュレーションモデルで，同様な成長を何度も観測する際，$h(x,t)$ が平均的にどのように変化するか，またどのような揺らぎを示すかということである．興味深いことに，このような多くのモデルにおいて，界面の揺らぎは $O(t^{1/3})$ 程度であることが観察される．これは平衡系における相転移とは違うが，系は臨界的な現象を示し，1/3 という特徴的な指数が現れている．界面の成長というのは非平衡現象の典型的な例の一つであるが，このような系の背後にも何らかの普遍性を期待できそうである．

1986 年，Kardar, Parisi, Zhang（KPZ）はこのような状況を記述すると考えられる非線形確率偏微分方程式を提案した：

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \eta(x,t). \quad (7)$$

ただしここで $\eta(x,t)$ はガウシアンホワイトノイズであり，平均は 0, 共分散は

$$\langle \eta(x,t)\eta(x',t') \rangle = D\delta(x-x')\delta(t-t') \quad (8)$$

で与えられる．(7) 右辺の第一項は拡散項で界面がより直線的になる傾向を表すが，第二項の非線形性と第三項のノイズの存在のために，非自明な揺らぎの様相を示すと期待される．

KPZ は，この方程式にくり込み群を応用することにより界面の揺らぎに関する指数 1/3 を見出した．これは上で説明したような平衡系の臨界現象で培ってきた理論，概念がある程度非平衡系でも有効であるということを示す例であり，この KPZ

方程式は，KPZ 普遍性クラスと呼ばれるクラスを代表するモデルとして広く知られている[8]．

ここで一つ注意しておくと，1 次元界面成長の問題は，時間を 1 次元と考えると 2 次元の問題と見なすこともできるのであるが，時間と空間が異なった指数でスケールし，等方的臨界現象ではないので，5 節で述べた共形場理論の分類の枠組みに単純には入っていない．しかし KPZ 方程式や同じ普遍性クラスに属する格子モデルに対しては厳密解を得ることができる場合があり，近年その性質が段々と明らかになってきている[9,10]．

その中で興味深い発見は，6 節で言及したランダム行列理論との関係であった．いくつかの離散界面成長模型において，界面高さの分布そのものが，ランダム行列理論に現れるのと同様な量で表され，その帰結として，界面の高さ揺らぎがランダム行列の最大固有値の揺らぎと同じものであるということが分かったのである．最近ではこの揺らぎそのものが実験で観測・確認されている[11]．

さらに界面成長とランダム行列理論とのアナロジーを追求していくと，例えば界面において円形成長（界面が曲率を持つ場合）と平坦成長（曲率 0 の場合）の違いが，ランダム行列でのエルミート行列と実対称行列の違いと対応しているということが分かった．その結果，界面の高さ揺らぎについて，長時間で非自明な分布を見るためのスケーリングには同じ指数 1/3 が現れるが，その揺らぎの分布まで見ると，実はそれは界面の曲率に依存して違いがあるということが分かったのである．5 節で述べたように，平衡系の臨界現象においては臨界指数のみに着目する場合が多い．これはある普遍性クラスの性質は臨界指数を与えればすべて決まってしまうという前提に基づいている．しかし KPZ 普遍性においては，我々はもう少し注意深くなければいけない．指数のみで臨界的な性質を議論することは不十分なのである．つまり，KPZ 普遍性は，指数 1/3 を共有するクラスとして大きく捉えることができるが，物理量の分布や相関関数はさらに初期条件や境界条件に依存し，いうなればそのような普遍性サブクラスにさらに分類されるのである．

8. おわりに

統計物理学は多数の構成要素が集まった際に全体としてどのような振舞いを示すかを理解しようとする学問体系である．相転移のような状況においては構成要素たちは協力的に働き，個々の構成要素のみに着目しただけでは到底予想もつかないような臨界現象を示すことがある．そしてその際，その協調の仕方にはある一定のパターンがあり，普遍性が見出される．平衡系の臨界現象に関してはくり込みという概念的な理解があるが，可能な臨界現象について完全な分類分けができているわけではない．しかし 2 次元の等方的臨界現象においては，共形場理論による美しい分類が完成している．

一方で世界は非平衡現象にあふれ，そこにおいても平衡系とはある種別の協調の仕方，普遍性が見られる．しかし非平衡系が示す臨界現象に関しては，KPZ 普遍性のように近年理解が大幅に進んだ例もあるが，平衡系と比較するとまだまだわかっていないことが多く，特にその分類理論はあまり進んでいない状況である．今後の発展に期待したい．

参考文献

1) 西森秀稔，『相転移・臨界現象の統計物理学』，培風館，2005.
2) 川上則雄，梁成吉，『共形場理論と 1 次元量子系』，岩波書店，1997.
3) 山田泰彦，『共形場理論入門』，培風館，2006.
4) 伊藤克司，『共形場理論～現代数理物理の基礎として～』，サイエンス社，2011.
5) M. Henkel, *Conformal invariance and critical Phenomena*, Springer, 1999.
6) 永尾太郎，『ランダム行列の基礎』，東京大学出版会，2005.
7) G. Akemann, J. Baik and P. Di Franscesco（編），*Handbook of random matrix theory*, Oxford University Press, 2011.
8) 本田勝也，『フラクタル』，朝倉書店，2002.
9) T. Sasamoto and H. Spohn, *J. Stat. Mech.* (2010) P11013.
10) I. Corwin, *Random Matrices: Theory Appl.* **1** (2012) 1130001.
11) K.A. Takeuchi, M. Sano, T. Sasamoto and H. Spohn, *Sci. Rep.* **1** (2011) 34.

（ささもと・ともひろ，千葉大学大学院理学研究科）

論理における分類

田中　一之

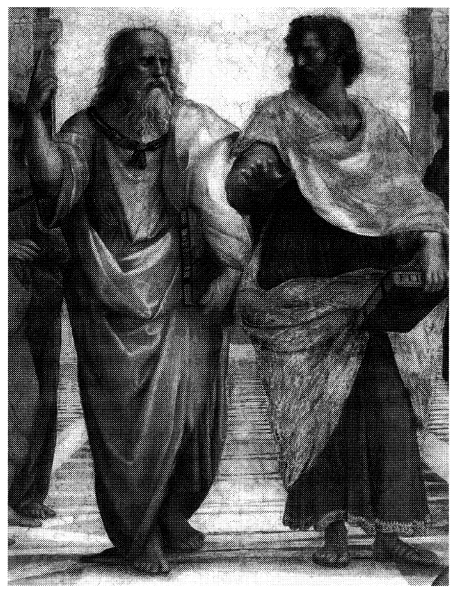
0. 序

論理学は，数学と同じように，古代ギリシャから続く長い歴史をもつ学問です．もちろん，さらに歴史を遡ることもできますし，インドや中国など他の地域の貢献も小さくはありませんが，古代ギリシャは特別で，とくにアリストテレスの書物「オルガノン」は，ただ論理学の聖典というばかりでなく人類の知的文化全般の形成に大きな影響を与えました．数学でいえばエウクレイデスの『ストイケイア（原論）』に相当するでしょう．実際，「オルガノン」と『ストイケイア』はお互いを補うような関係にあって，中世以降19世紀まで西洋の教養を支える二本柱だったのです．

プラトンの学園（アカデメイア）では「幾何学を知らざるもの，ここに入るべからず」というモットーの通り，幾何学を中心とする数学が熱心に研究されました．ただ，なぜかプラトンの弟子アリストテレスの学園（リュケイオン）ではどのような数学が教授されていたかほとんど資料がありません．『ストイケイア』にプラトンの弟子たちの仕事が使われていることは確かなので，ひょっとするとアリストテレスもすでに『ストイケイア』のような本を書いていたかもしれないのです．

下って，19世紀後半になると，数学には「非ユークリッド幾何学」のように古代ギリシャになかった世界が現れ，論理学でもブールやフレーゲらによって新しい記号体系が発明され，またカントルの無限集合論，ヒルベルトの形式主義などの新しい立場が登場しました．その後，20世紀を通じて数学も論理学も大きく発展し変容したのですが，我々はここで改めて論理学が何かを問うてみましょう．

20世紀の論理学は，数学基礎論や数理論理学という新しい呼称が示す通り，数学との交流を通じ，あるいは数学の一分野として大きく発展しました．そして，最近の論理学は，数学との関わりだけでなく，計算機科学をはじめ，量子論理，ゲーム理論，確率的推論等々，幅広い領域に応用されています．他方，非古典論理の研究，可能世界意味論の構築，人工知能の基礎理論など哲学面でも一層深化しました．このように論理学は著しく発達し，幅広く役立っているのですが，それは果たして論理学本来の進化だといえるでしょうか？ 単に論理学のユーザーが増えただけなのではないでしょうか？



左がプラトン，右がアリストテレス．ラファエロ「アテナイの学堂」（1510年）より

そこで，もう一度数学と比較してみましょう．昨今『ストイケイア』を研究する人は，数学史の専門家でも少ないと思うのですが，それがどんな本かは数学に興味がある人なら誰しも知っています．そして，いまで

も数学書の多くが『ストイケイア』のスタイルに倣って，定義，公理，命題，証明などを並べる構成をとっています．実は，このような公理論的な学問の形は，エウクレイデス以前にアリストテレスが提唱したものだったのですが，これについてはまたあとで触れます．

さて，論理学についてはどうでしょうか？ 現代の研究にも「オルガノン」の思想やスタイルは生きているでしょうか？ 残念なことに，もはや「オルガノン」は『ストイケイア』のようには広く知られておらず，現代の論理学者（どれくらいいるでしょうね）がそれを意識しながら研究スタイルを作ることはきっと稀でしょう．後述のように，「オルガノン」の核心は，命題や推論の「分類」です．単純な分類でもいくつか段階的に組み合わせることで，リアルで複雑な論理構造も解明できるようになるというのが基本的なアイデアです．この「オルガノン」の思想やスタイルは，現代の論理学でもあちこちで息づいていると思うのですが，大概は無意識に踏襲されています．けれど，いくらか意識的に行われている研究プログラムもあり，その代表が「逆数学」です．このプログラムは，証明に必要な公理の強さによって数学の定理を分類するものです．皮肉な人たちは，定理を「分類することにどんな意味があるのか」，「分けるだけでは何も分からないじゃないか」といった疑問を投げ返しています．それはまさに『ストイケイア』にも当てはまる疑問ですが，そうした疑問に答えるのはまた別の機会に回し，この小論ではアリストテレスのDNAが現代論理学にもどっこい生きていることを実証してみたいと思います．そのため「オルガノン」と「逆数学」とをパラレルにご紹介します．両者をつなぐキーワードの１つは，「量」による論理式の「分類」です．

「逆数学」の第一人者で，私のメンターであるシンプソン教授から直接伺ったところでは，彼の最も尊敬する論理学者は中世のアリストテレス主義者のトマス・アクィナスだそうです．そう考えると，「オルガノン」と「逆数学」の類似性はここで私が述べる以上に本質的なものかもしれません．さらに詳しい検証は今後の課題としたいと思いますので，読者諸賢にご指導いただければ幸いです．

1. アリストテレスの述語論理

アリストテレス（紀元前 384–322）は論理学の祖と言われていますが，彼が研究したのはロゴス（言葉，論理）の学（「ロギコン」，ストア派の用語）ではなく，学問の「道具（オルガノン）」でした．師プラトンの観念論に抗して自然観察や知識の整理を重視した彼は，壮大な学問体系を構築する土台として「オルガノン」を編んだのです．正確にいうと，「オルガノン」は，6つの著作『範疇論』,『命題論』,『分析論前書』,『分析論後書』,『トピカ』,『詭弁駁論』の総称として後の時代に付けられた名で，当時からこれらを一纏めにしてそう呼んでいたのではありません．最初の 4 つの書は内容に明解な積み重ねがあって，概念（語）から命題，命題から推論，推論から論証へと発展する完璧な理論を形成しています．残りの 2 つにも有用で面白い話題が集められていますが，理論的にあまり体系化されていないので，ここでは扱いません．

現代論理学の一般的な教科書では，命題論理を一通り勉強してから，述語論理を習うことが多いと思います．教科書によると，真偽を表す文が「命題」で，命題の論理的なつながりを調べるのが「命題論理」でした．そして，文をさらに主語と述語に分解して，その真偽を調べるのが「述語論理」でした．すると，歴史的にも，命題論理が述語論理より先にあるように思われるかもしれませんが，それは正しくありません．アリストテレスが研究したのは「命題論理」でなく「命題論」であり，それは一種の「述語論理」なのです．

命題論理の研究を本格的に行ったのは，それより後のクリュシッポス（紀元前 280 年頃–207 年頃）です．クリュシッポスは，論理学のありとあらゆる話題について研究していたと言われているのですが，その著作はほとんどが失われています．重要なポイントは，彼はストア派の学頭で，「すべての人間が同じ普遍的理性を有している」とするストア派の教義を説くために形式論理を発展させたことです．これは，「オルガノン」のように学問の道具を作るのとは全く違ったモチベーションです．最近の論理学史の本では，クリュシッポスを古代における最高の論理学者と評価するものが多く，私も一応敬意を払ってこのことを記しておきました．

2. 命題論

「オルガノン」の説明に入ります．最初は『概念論』です．概念は十の「範疇」に分類されるのですが，「範疇」はもともと「述語（カテゴリア，ラテン語でプレディカメンタ）」のことです．そこで，例えば「馬（である）」というのは「実体」の範疇，「2 つ（である）」

というのは「量」の範疇,「白い」というのは「質」の範疇などとなります.「範疇」の話はとても難しく,後にカントが整理していますが,論理学というより,哲学の範疇に入るので,このくらいにしておきます.

論理学として重要な始まりは『命題論』です.命題は,量と質と様相の 3 つの観点において区分されますが,様相についてはここでは省きます.最初に,「量による分類」は次の 3 種類です.

（イ）**全称命題**：すべての S は P である.
　（例）「すべての人間は動物である.」
（ロ）**特称命題**：ある S は P である.
　（例）「ある動物は空を飛ぶ.」
（ハ）**単称命題**
　（例）「ソクラテスは哲学者である.」

単称命題は,主語の外延が唯一つの要素をもつ場合の全称命題とみなせるので,基本的に全称と特称の 2 種類と考えることができます.現代論理学で,全称命題は ∀ で始まる論理式で表され,特称命題は ∃ で始まる論理式で表されます.

「質による分類」は,以下の 2 種類です.

(a) 肯定命題.
(b) 否定命題.

そこで,上述の「量による分類」と組み合わせると次の 4 種類の命題が生まれます.

(1) 全称肯定命題：すべての S は P である.SaP と記し,単に A とも示す.
(2) 全称否定命題：すべての S は P でない.SeP と記し,単に E とも示す.
(3) 特称肯定命題：ある S は P である.SiP と記し,単に I とも示す.
(4) 特称否定命題：ある S は P でない.SoP と記し,単に O とも示す.

簡単に表にまとめれば,下図のようになります.

	全称	特称
肯定	A	I
否定	E	O

これらの命題は条件なしにある事柄を主張しているので,「定言命題」と呼びます.

条件付きの主張である「条件命題」には次の 2 種類があります.

(5) 仮言命題：もし S が P ならば,Q は R である.
　（例）「もしこの本がベストセラーならば,著者は大金持ちだ.」
(6) 選言命題：S は P あるいは Q である.
　（例）「ペンギンは鳥類か哺乳類だ.」

以下の議論では,条件命題は扱いませんが,命題の分類をもう一度まとめておきます.

- 命題
  - 定言命題
    - 全称肯定命題（A）
    - 全称否定命題（E）
    - 特称肯定命題（I）
    - 特称否定命題（O）
  - 条件命題
    - 仮言命題
    - 選言命題

3. 直接推論

定言命題に対する演繹推論の分類に取りかかります.前提が 1 個の推論を直接推論,2 個以上のものを間接推論（後述）といいます.前者には「対立（opposition）による推論」と「変形による推論」がありますが,ここでは論理学的により重要な「対立による推論」だけを説明します.

主語 S と述語 P を共通にもち,質や量において異なる命題を「対立」の関係にあるといいます.そして,対立の関係をもつ一方の命題の真偽から他方の命題の真偽を判断する推論を「対立による推論」というのです.「すべてのカラスは黒い」(A) が真ならば,「あるカラスは黒くない」(O) は偽であるといった推論です.これらの関係は,下図のような四角形にまとめることができます.

A「すべての鳥は黒い」	← 大小 →	I「ある鳥は黒い」
↑	↖　↗	↑
反対	矛盾	小反対
↓	↙　↘	↓
E「すべての鳥は黒くはない」	← 大小 →	O「ある鳥は黒くはない」

この図は,アリストテレスの「対立の四角形 (square of opposition)」と呼ばれています.

4. 三段論法（間接推論）

では,アリストテレス論理学の核心である「定言三段論法」について説明します.一番分厚い『分析学前

書』の中の一番重厚な内容ですが，エッセンスはそれほど難しくはありません．三段論法（シュロギスモス）は，2つの前提から1つの結論を得る間接推論の代表です．いま，結論を SzP $(z=a,e,i,o)$ とすれば，2つの前提は無意味な場合を除けば，ある M に対して，

第1格：MxP と SyM,
第2格：PxM と SyM,
第3格：MxP と MyS

の3種類が考えられます（但し $x,y=a,e,i,o$）．

それぞれの格において，x, y, z は4種類ありますから，計 $4^3=64$ 通りの推論ができます．そして，3つの格を合計しますと，$64\times3=192$ 通りになります．しかしながら，それらがすべて正しい推論というわけではありません．第1格については4式，第2格についても4式，第3格については6式のみが妥当な推論です．例えば，第1格の正しい推論の一つは，含まれる3つの命題がすべて A 型になる，略して AAA 式（Barbara と暗記する）です．細かい話は専門書（文献1) など）に譲るとして，ここで知っておきたいことは，アリストテレスは，第1格の正しい4式をもとに，第2格と第3格の正しい推論を導き出し，また正しくない式には反例をあげていることです．つまり，単に三段論法を分類しているだけでなく，分類の妥当性もできる限り厳密に検証しているのです．以上が，『分析論前書』の要点です．

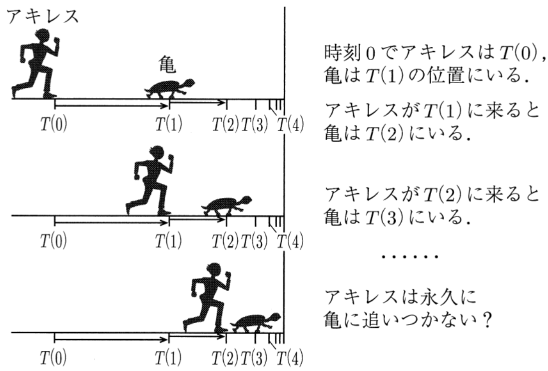
『分析論後書』では，個別の推論から論証の研究に進みます．公理，定義，仮説がどう違うかといった検討から帰納的推論を含めた様々な論証の妥当性が議論され，論理学というよりもまた哲学的になっていきます．ただ，ここで語られる一般論は「公理」の議論だけでも『ストイケイア』を予見させますし，内容が形式的でないのでいろいろな連想が浮かびます．

5. ゼノンとカントル

現存するアリストテレスの著作において，「オルガノン」に続く本は（数学を飛ばして）『自然学（フィジカ）』です．自然学というのは現代の「理学」に相当します．とくに重要なコンセプトは「運動（キネーシス）」で，それに関連して「ゼノンのパラドックス」が批判的に取り上げられます．ここでは，4つのパラドックスの中でも特に有名な「アキレスと亀」について説明します．

ゼノンは，次のような論法によって「俊足のアキレスがのろまの亀に追いつけない」と主張したそうです．

0. アキレスより亀が先にいる．
1. 亀のいる地点にアキレスが到達する．
2. その間に亀は少し前進している．
3. つぎに亀のいる地点にアキレスが到達する．
4. その間にもやはり亀少し前進している．
5. これをいくら繰り返しても，アキレスは永久に亀に追いつけない．



現代人なら次のように考えて，どうしてわざわざ話を複雑にするのかと思うかもしれません．

> アキレスの速度を s，亀の速度を r，アキレスと亀の最初の距離を a とし，$r<s$ と仮定する．このとき，時間 t のアキレス移動距離は st で表され，亀の移動距離は rt で表される．従って，$st=rt+a$ が成り立つとき，すなわち時刻 $t=\frac{a}{s-r}$ でアキレスは亀に追いつく．

このような説明では古代ギリシャ人を納得させられません．「速度」の概念が確立していないからです．そもそもゼノンが言いたかったことは，「運動」の概念が論理的に矛盾を引き起こすということでした．「亀に追いつく」という有限時間の運動が，無限に分割できるのはおかしいというのがその論拠でした．

これに対して，アリストテレスは，連続体が際限なく分割可能であることには論理的に矛盾はないとしました．しかし，実際に無限個に分割したり，無限の先を見渡したりすることができないため，「実無限」に言及していることは論理的に間違いだとしました．以来，19世紀まで「実無限」は科学の手に負えないもの，数学の論理からはみ出したものと広く見なされてきました．しかし，数学が急速に進歩して，とくに微積分学が普及すると，実無限を扱う新たな数学手法の整備

が必要となったのです．そこに生まれたのがカントルの無限論，つまり集合論です．カントルと彼の集合論については，本誌の私の解説[6]で詳しく述べましたので，興味ある方はそちらをご覧ください．ここでは，「分類」というテーマから次のことだけ繰り返しておきます．

カントルは実無限を3種類に分け，彼はそのすべての存在を認めています．第一は，神の中にあり，完全であって，それ以上拡大できないような「絶対無限」．第二は，創造された世界に生じる「物理的無限」．第三は，人間の精神によって把握される「数学的無限」です．ここで，集合論の博士号をもつ異色のSF作家ルディ・ラッカーの説によると，この3種類の無限のどれを認め，どれを認めないかで8通りの立場ができ，それぞれにもっとも相応しい人を選ぶと，以下のようになるということです[2, P.309]．

	数学的無限	物理的無限	絶対的無限
A・ロビンソン	×	×	×
プラトン	×	○	×
トマス・アクィナス	×	×	○
ブラウワー	×	○	○
ヒルベルト	○	×	×
ラッセル	○	○	×
ゲーデル	○	×	○
カントル	○	○	○

アリストテレスによる数学の記述としては，他にも『形而上学』のとくにM巻N巻に数学の哲学に関する議論がありますが，本解説の趣旨からはそれるので省略します．

6. 逆理から数学思想，そして逆数学へ

カントルが実無限を数学の世界に復活させると，そこに次々と新しい逆理が発見されました．その代表が，いわゆる「ラッセルのパラドックス」です．これは，自分自身を要素として含まないような集合全体を集合Rと考えると，集合Rは自分自身を要素として含んでも含まなくても矛盾を生じるというものです．しかし，実無限が新しい数学の発展にとって有益であることは明白であったので，それを排除するよりは，どのように認めるかで多くの立場が生まれました．

数学界の大御所ヒルベルトは，『幾何学基礎論（1899）』でユークリッド幾何学の無矛盾性を実数論のそれに帰着させることに成功しました．また，実数論を含む解析学の基礎は，自然数の集合だけを扱う2階算術の上で形式化できることを彼は示しました．2階算術ではラッセルのパラドックスも生じません．そこで，ヒルベルトは2階算術の無矛盾性を（いわゆる「有限の立場」において）証明することを最終目標とする研究計画を立てました．

残念ながら，ヒルベルトの計画はゲーデルの不完全性定理（1931）によって頓挫してしまうのですが，その後様々な修正計画が生まれました[5]．例えば，ヒルベルトの助手をしていたゲンツェンは，（「有限の立場」を少し緩めた立場で）2階算術の部分公理系ACA_0の無矛盾性を証明しました（ACA_0の定義は後述）．ゲンツェンが直接ACA_0を扱ったわけではありませんが，この体系では，実数の連続性や，解析学の基礎的性質もかなり導けるので，ヒルベルトの計画が部分的に実現されたともいえるでしょう．

他にも数多くの修正計画や，異なるアプローチがあります．それらをここでいちいち説明することはできませんが，「逆数学」の視点からいくつかの立場を分類すれば，次のようになります．

数学思想	重要人物	近似体系
実効性 多項式時間	Ko	s_2^1, BTFA
有限の立場	Hilbert	PRA
計算可能性	Aberth, Pour-El	RCA_0
構成主義	Bishop	RCA_0
有限的還元主義	Hilbert	WKL_0
可述性	Weyl	ACA_0
可述的還元主義	Feferman	ATR_0
半有限的無矛盾性	Takeuti	$\prod_1^1$-CA_0
2階算術	Hilbert	Z_2
（分岐）型理論	Russell	PM
構成可能性	Gödel	V = L
巨大基数	Gödel	V_α

7. 逆数学

証明にどれだけ強い集合存在公理が必要かということで，数学の定理を分類してみようというのが「逆数学」プログラムです．このプログラムでは，とくにヒルベルトの2階算術という枠組みを使って研究が進められてきました．集合論や他の体系を使うことも可能

ですが，2階算術は一般の数学に一番フィットするサイズで，この土俵の上で等高線を入れてみると，数学史の流れや，異なる理論間の感覚的な類似性がうまく捉えられるのです．

2階算術についてもう少し説明しておきます．自然数を対象とした理論を「1階算術」といい，自然数と自然数からなる集合の両者を対象とした理論を「2階算術」といいます．2階算術の公理系 Z_2 は，自然数の順序や和積演算に関する1階算術の諸公理と，定義し得るどんな自然数の集まりも“集合”として扱えることを保証する集合存在公理（内包公理）から成り立っています．体系 Z_2 の無矛盾性を証明することはとても困難で，集合存在公理にいろいろな制限を付けた部分体系の無矛盾性についてこれまで研究されてきました．

逆数学の議論において，特に重要な体系（BIG-5）は集合存在公理の弱いほうから順に，

$$RCA_0,\ WKL_0,\ ACA_0,\ ATR_0,\ \prod_1^1\text{-}CA_0$$

の5つです．1970年代半ば，H. フリードマンは Z_2 の各部分体系でどれだけの数学が展開できるかを調べ，次のような現象に気付きました：

> 数学の定理の多くは RCA_0 で証明できるか，そうでなければ上にあげた他の4つの体系のどれかと論理的に同値であることが RCA_0 において証明できる．

これは「逆数学現象」と呼ばれ，その後もこのパターンに当てはまる数多くの定理がシンプソンを中心とする研究者によって発見されています[3),4)]．

研究成果をもう少し詳しく説明するためには，まず2階算術の論理式の分類を定義しておかなければなりません．2階算術は自然数と自然数の集合を対象とするので，変数も数変数 $x, y, z, \cdots$ と集合変数 $X, Y, Z, \cdots$ の2種類を用意しておきます．すると，量化記号 $\exists$, $\forall$ の後に来る変数が2種類あるので，合わせて4種類の量化子ができます．これらの組合せの複雑さによって，$\sum_k^i$ や $\prod_k^i$ といったクラスが以下のように定義されます．

2階算術の論理式の分類

- 有界式は，$\forall x < t, \exists x < t$ のみ．
- $\sum_k^0$ 式は，有界式の前に，存在記号に始まる数の量化記号が k 個．
- $\prod_k^0$ 式は，有界式の前に，全称記号に始まる数の量化記号が k 個．
- 算術式は，集合の量化記号を含まない．
- $\sum_k^1$ 式は，算術式の前に，存在記号に始まる集合の量化記号が k 個．
- $\prod_k^1$ 式は，算術式の前に，全称記号に始まる集合の量化記号が k 個．

厳密な話をすると，いわゆるタルスキ・クラトフスキーのアルゴリズムによって，なるべく簡単な式に同値変形したもので分類を考えるのですが，その辺の話は専門書[3),4)]に譲ります．ここでは，例えば次のような例を理解しておくと良いでしょう．

論理式の例

- X は無限：$\forall x \exists y (x < y \land y \in X)$（$\prod_2^0$ 論理式）．
- X は整列：$\forall Y ((Y \subset X \land Y$ は下降列$) \to Y$ は有限)（$\prod_1^1$ 論理式）．

では，簡単にBIG-5について説明します．

1. 体系 RCA_0 は Δ_1^0 式（$\sum_1^0$ 式で，$\prod_1^0$ 式とも同値な論理式）で定義される集合（再帰的集合，計算可能集合）の存在を保証する．荒っぽくいえば，RCA_0 で展開される数学は計算機が扱える範囲の数学である．例えば，RCA_0 では，中間値の定理が証明できる．理由は，中間値の定理には2分法と呼ばれるアルゴリズムがあって，任意の $n > 0$ に対し，誤差 $\pm 1/n$ 以内の近似有理解を有限ステップで求められるからである．

2. 体系 WKL_0 は，RCA_0 に“無限個の頂点を持つ2進木は無限長の道（path）をもつ”という弱ケーニッヒの補題（Weak König's Lemma）を公理として加えたもの．WKL_0 では，カントル空間 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ のコンパクト性や実閉区間 $[0,1]$ のコンパクト性（ハイネ・ボレルの定理）が導け，さらにそれらと WKL_0 との同値性も RCA_0 で証明できる．

3. 体系 ACA_0 は，算術式に関する内包公理をもつ．算術的内包公理と同値になる定理には，ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理，加算ベクトル空間の基底の存在，一般のケーニッヒの補題などがある．

4. 算術的内包公理を超限回繰り返して得られる集合の存在を主張する公理を RCA_0 に加えたものが ATR_0 である．この超限操作は，開集合のクラス G から始めて，加算集合演算によって $G_\delta, G_{\delta\sigma}, \cdots$ のようにボレル集合を構成していく手続きに相応するもので，スースリンの分離定理など記述集合論のいろいろな定理がこの体系と同値になる．

5. $\prod_1^1$ 式で定義される集合の存在を要請する公理を

	RCA_0	WKL_0	ACA_0	ATR_0	$\prod_1^1$-CA_0
解析（可分）:					
微分方程式	○	○			
連続関数	○○	○○	○		
完備性等	○	○	○		
バナッハ空間	○	○○	○		○
開集合／閉集合	○	○		○○	○
ボレル集合／解析集合	○			○○	○○
代数（可算）:					
可算体	○	○○	○		
可換環	○	○	○		
ベクトル空間	○		○		
アーベル群	○		○	○	○
その他：					
数理論理学	○	○			
可算順序数	○		○	○○	
無限マッチング		○	○	○	
ラムゼーの性質			○	○	○
無限ゲーム			○	○	○

RCA_0 に加えたものが，$\prod_1^1$-CA_0 である．ここまで強い公理を必要とする普通の数学の定理はむしろ少ないが，ボレル・ゲームの決定性やボレル集合のラムゼイ性はこれを超える．

これ以上技術的な話はできないので，BIG-5 が数学の定理をどのように分類するか，主な結果をシンプソンの本[4, p.45]から抜き出して上の表にまとめておきましょう（○は一つの定理を表します）．

8. おわりに

現代論理学の標準となる 1 階（述語）論理の公理体系をヒルベルトとアッケルマン（1928）が初めて定式化したとき，彼らはアリストテレスの定言三段論法が彼らの論理体系でうまく表現できることを示しました．さらに遡って，ブールがいわゆるブール代数を導入した際にも，彼は定言三段論法を代数的に表現してみせました．でも，こうした説明により，アリストテレスの形式論理学と関連付けることが論理学において本質的であるように思ったらたぶん誤解でしょう．確かに「オルガノン」は定言三段論法に関する見事な理論を構築しましたが，それよりももっと大切なことは，生物の分類法をモデルにして，命題や推論を分類しようとしたアリストテレスの思想にあると思います．その意義を語るのは私には重すぎる課題ですが，良かれ悪しかれ彼の分類好きの DNA は現代論理学にも生きており，その証拠の 1 つとしてこの小論では「逆数学」を取り上げました．他に思いつく例もありますが，私自身一番馴染みのある研究プログラムだからです．

最後に，シンプソンが彼の本[4]の序論で引用しているアリストテレスの言葉を紹介して，この文を閉じることにします．

> 数学においては，前提と結論を置き替えることがよくある．なぜなら，前提になるのは定義であって，偶然の出来事ではないからである．『分析論後書 (78a10)』

参考文献

1) 山下正男著『論理学史』岩波全書，1983 年．
2) R. Rucker, “Infinity and Mind”, Princeton, 1995 年．
3) 田中一之著『逆数学と 2 階算術』河合文化教育研究所，1997 年．
4) S. Simpson 著 “Subsystems of Second Order Arithmetic” 初版：Springer, 1999 年, 第二版：Cambridge, 2009 年．
5) 田中一之編著『ゲーデルと 20 世紀の論理学』全 4 巻，東京大学出版会，2006–7 年．
6) 田中一之著，カントルと集合論，『数理科学』2011 年 3 月号，77–83.

（たなか・かずゆき，東北大学大学院理学研究科）

統計学における分類
データのクラスタリング



村田 昇

1. はじめに

統計における分類問題とは，適切な基準に基づいてデータ点をグループに分ける問題である．例えばインターネット上にはメール，ニュース記事，ブログ記事などの言語データから画像，音声，楽曲，動画などのマルチメディアデータまで，日々大量のデータが蓄積されているが，これらを自動的に分類・整理する問題は近年重要性が増している．また，インターネット上のデータに限らず，企業が保有する大量の顧客データや工場の操業データからの有益な情報の抽出や，ネットワークセキュリティのための異常検出なども分類問題としてで取り扱うことができる．このため，統計に限らずパターン認識や機械学習の分野でもこの問題は現在活発に研究されている．

問題設定としては大きく２つに分けられる．１つはラベルやタグといった外的基準が与えられたデータ点の集合をグループに分けるためのルールを獲得する**識別問題**である．もう１つはラベルなどの外的基準のないデータ点の間に何らかの（主に位相的な）構造を見つけ出し自動的にグループ分けをする**クラスタリング問題**である．前者の識別問題は**教師あり学習**（または教師付き学習）とも呼ばれ，身近なところではメールソフトに採用されている学習機能付きのスパムフィルタがある．使い始めの頃にユーザがメールを見てスパムメールかそうでないかを判断してラベルを付けると，このラベルをもとにスパムとそれ以外を区別するルールをソフトが自動的に獲得していく．一方，後者のクラスタリング問題は**教師なし学習**と呼ばれ，例えばブログ記事の自動分類や収集などに用いられている．ニュース記事のようにジャンルが配信元で与えられている文章とは異なり，個人の意見や日記が掲載されるブログではジャンルが明記されることは少ないので，共通の話題が書かれているサイトのグループが自動的に分けられていると重宝するし，あるいはtwitterのような短い文章の場合は同じ内容を扱った文章が時系列に沿って１つの文章として取りまとめられていると関連する話題を追い掛け易くなる．

本稿では，後者のラベルのないデータを扱うクラスタリング問題に焦点を当て，データ点の間に与えられた距離からデータ集合の構造をどのように見つけ出すのか，その仕組みを紹介していく．

2. クラスタリングの考え方

まずクラスタリング[1,2]の基本的な考え方をまとめておこう．データ点の集合をグループ分けするための基準は，２つのデータ点の間に与えられる距離である．このとき個々のデータは数ベクトルで表現されている必要はなく，データ点の間の距離に相当する量さえ定義されていれば良い．

例えばデータ点が文章に対応する場合を考えよう．各文章は長さも違えば，扱われている話題も異なるわけだが，２つの文章それぞれで使われている単語（形態素）を調べて，片方の文章にしか現れない単語と両方の文章に現れる単語の出現頻度の比を考えることで「どの程度文章が似ているか」を測ることができるだろう．両者が似た内容を扱った文章であれば共通に現れる単語が多くなるのでこの比は小さくなり，異なる内容を扱っていれば片方にしか現れない単語が多くなるので比は大きくなると考えられる．したがって，この比によって「文章の異なる度合」を表すとしても良いだろう．データのどういった性質の違いを考慮するかによって，この例以外にも様々な「データ点どうしの

異なる度合」を考えることができる．

クラスタリングに用いるこうした基準は，距離の定義に必要ないくつかの性質（非負性，対称性，非退化性，三角不等式の成立）のうち，三角不等式を満たしていなかったり，退化していることがあるため，厳密には距離と区別され**非類似度**（dissimilarity）と呼ばれる．ただし，非類似度というのは一般には馴染の薄い言葉なので，本稿では若干の不正確さは許してもらうこととして距離と呼ぶことにする．

さて，グループ分けを行う計算手続きとしては，大きく2つに分けられる．逐次的にグループを作っていく**階層的方法**と，特定の数のグループを並列に作っていく**非階層的方法**である．

階層的クラスタリングの代表的な方法では，小さなグループを順次統合して大きなグループを形成していく．まず初期状態としては，データ点1つだけからなる集合を用意する．すなわち初期状態では集合の数はデータの数だけある．この中から，最も距離が近い2つの集合を選び，これを合併して1つの集合とする．この操作により集合の数は1つ減ることに注意しよう．新たにできた集合も含めてすべての集合の中から最も近い集合2つを選び再び合併する．以下，同様にして最終的に1つの集合となるまでこの合併の作業を繰り返していく．これは**凝集的**クラスタリングと呼ばれる方法で，この合併の様子は実データを使った例のところで示す図3のような**系統樹**（dendrogram）によって簡単に図示することができる．

さて，データ点どうしの距離は最初に与えられているが，集合どうしの距離についてはこれまで具体的に定めていない．実はこの操作の中で肝となるのは集合どうしの距離をどのように定めるのかということである．定義の仕方には様々なものがあるが，直感的にも判り易い例としては，集合 A と B にそれぞれ含まれる点の間の距離の平均を，A と B の2つの集合の距離とするものがある．この距離の計算方法は群平均法（average linkage method）と呼ばれ，データ点 i, j 間の距離を $d(i,j)$，集合 A, B 間の距離を $D(A,B)$，集合 A の要素数を $|A|$ で表すことにすれば，

$$D(A,B) = \frac{1}{|A||B|} \sum_{i \in A, j \in B} d(i,j) \qquad (1)$$

と書くことができる．階層的クラスタリングの手続きを行うためには，集合を合併するたびにこの式に則って集合どうしの距離を計算し直せば良いのだが，実はもう少し賢い方法がある．3つの集合 A, B, C を考え，A と B を合併した集合 $A+B$ と C の距離を考えると，簡単な計算で

$$D(A+B,C) = \frac{|A|D(A,C) + |B|D(B,C)}{|A| + |B|} \qquad (2)$$

となることがわかる．つまり合併した集合とそれ以外の集合との距離は，データ点どうしの距離まで立ち返ることなく，それまでに計算された集合どうしの距離に基づいて簡単に計算することができる．

こうした集合どうしの距離は群平均法以外にもいくつか提案されており，例として重心法（centroid method）

$$\begin{aligned} D(A+B,C)^2 \;=\; & \frac{|A|D(A,C)^2 + |B|D(B,C)^2}{|A| + |B|} \\ & - \frac{|A||B|D(A,B)^2}{(|A| + |B|)^2}, \end{aligned} \qquad (3)$$

Ward 法（Ward's method）

$$\begin{aligned} D(A+B,C) \;=\; & \frac{|A| + |C|}{|A| + |B| + |C|} D(A,C) \\ & + \frac{|B| + |C|}{|A| + |B| + |C|} D(B,C) \\ & - \frac{|C|}{|A| + |B| + |C|} D(A,B) \end{aligned} \qquad (4)$$

などがある．解析においては，データ集合の性質に応じて適切な距離を選択する必要があるが，この中ではWard 法が比較的良く用いられる．

上で述べた凝集的な方法は，小さなグループを統合して大きなグループを形成していくものであった．逆に大きなグループを分割しながら小さなグループに分けていく**分割的**な方法もある．しかしながら，以下に述べる計算量の問題から実用上は凝集的な方法が主として使われている．まず，データ数を n とすると，凝集的な方法では最初に n 個の集合から2つの集合を選ぶため，${}_n\mathrm{C}_2$ 個の組合せの候補から適切なものを1つ選ぶための比較計算が必要となる．合併するたびに候補の数は減っていくが，これを $n-1$ 回繰り返すので n^3 回程度の比較を行うことになる．一方，分割的な方法では，n 個のデータを含む1つの集合を分割する最初の段階で，$2^n - 2$ 個の分割の候補から1つの分割を選ぶ必要がある．例えば $n = 20$ で分割の候補は100万を超える．すべての分割を総当たりで調べずに済む方法も提案されているが，分割的な方法は計算量としては非常に不利であることが容易に想像されるだろう．

もう1つのグループ化の方法である非階層的クラスタリングには，***k*-平均法**（k-means）や混合分布に基づ

く方法があるが，k-平均法とその仲間のアルゴリズムは簡便で高速なため，大規模データの解析によく用いられる．まず k 個の代表点をデータ集合の中に配置する．通常はデータ点からランダムに k 個の点を選択し代表点とする．次にデータ点と代表点の間の距離を計算し，データ点ごとに一番近い代表点を求める．これによって各データ点がどの代表点のグループに所属するのかが決まり，結果としてデータ集合が k 個のグループに分割される．次に分割された各グループのデータを用いて，代表点を決め直す．データ点が数ベクトルとして表現され，グループ内の**平均値**（mean）や**中央値**（median）といった要約統計量が計算できる場合は，これらの統計量を新たな代表点とすることができる．一方こうした値が計算できない場合は，他の点までの平均距離が最小となる集合 C の**中心点**（medoid）

$$i^{\mathrm{med}} = \arg\min_{i \in C} \sum_{j \in C, j \neq i} d(i, j) \qquad (5)$$

を用いることができる．こうして得られた新たな代表点により再びグループの分割を行う．適切な収束条件が満たされるまで，代表点の算出とグループの分割を繰り返すアルゴリズムを，代表点の決め方によってそれぞれ k-means, k-median, k-medoid と呼ぶ．ただし，手続きは簡便であるが，一般に局所解が多く，初期値依存性が高いことが知られている．このため，初期値をうまくとらないと適切なクラスタリングが行われないこともある．良い初期値を高い確率で選択する方法[3]なども提案されているが，実用上は複数の初期値でアルゴリズムを実行して最も良い結果を選択するなどの工夫が必要である．

3. 実データの例

それでは実際のデータを使ってクラスタリングの効用を見てみることにしよう．

ここで取り上げるデータは，2012 年末に発表されたミステリー小説のランキングデータ[5]である．毎年発表されるたびに，どのような作品が上位にくるのかを愉しみにしている人も多いだろう．また，お気に入りの作家の作品の順位に一喜一憂したり，自身が推しているマイナーな作品が上位に食い込んでほくそ笑んでいる人もいるだろう．ミステリー小説のランキングデータはいくつかあるが，ここで用いるデータでは，編集部が選んだ「読書の達人」に対してアンケート調査を実施し上位 6 作品を選んでもらい，1 位を 10 点，2 位を 9 点，以下同様に 6 位を 5 点として集計された総合得点でランキングを算出している．

この年アンケート調査に回答したのは 73 名，誰かが投票し評価されたのは 145 作品である．表 1 にデータの一部を掲載する．表やグラフが繁雑になるので，達人の名前や作品名は図 8 を除いて無名化してあるが，達人の番号は掲載順，作品を表す番号は順位に対応している（同順の場合，文献内の一覧表にある 48 位以内の作品については掲載順，それ以外は適当に並べている）ので，興味のある人は文献を参照してほしい．これを集計した得点分布は図 1 のようになっている．上位の作品は得点が高いので，縦軸は対数を取っている．また各作品に投票した人数は図 2 のようになっている．当然のことながら点数の高い作品は多くの人が投票しているため，得点との相関が高いことがわかる．

さて，このランキングデータから自分が未読の作品の中でどれが高い評価を得ているかを知ることができるので，次に読む作品の候補を絞ることができる．しかしながら，多くの人は上位の作品からしらみつぶしに読むほど読書に割ける時間はないだろうし，作風の好みもあるのでランキングの上位作品に必ずしも満足するとは限らないだろう．総合得点という 1 つの指標に拘ると選択の余地がなくなってしまうが，実はこのデータにはもっと多くの情報が含まれている．未読の作品から満足のいくものを選ぶための 1 つの戦略は，例えば「自分が好きな既読の作品を高く評価している達人の薦める作品を選択する」ことであろう．この基本戦略に則って 1 人の達人を選んでも良いが，おそらく複数の達人の意見を統合したほうがより良い作品に出会える確率が高いであろう．そこで「達人らに同じように評価されている作品をクラスタリングし，自分の好きな作品が含まれているグループから未読の作品を選択する」ことを考えてみることにしよう．

表 1　データの一部（番号は作品の順位に対応）．

	1 位	**2 位**	**3 位**	**4 位**	**5 位**	**6 位**
達人 1	16	4	40	86	9	60
達人 2	10	23	50	87	17	2
達人 3	64	15	45	48	61	57
達人 4	4	20	9	8	13	22
達人 5	6	40	15	14	60	13
達人 6	6	39	77	28	104	7
達人 7	38	67	32	88	10	24
達人 8	3	11	1	2	5	26

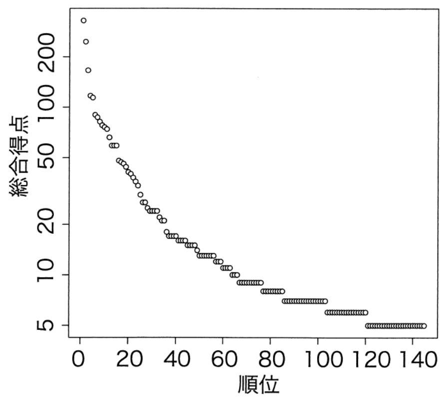


図 1　順位と得点の関係.

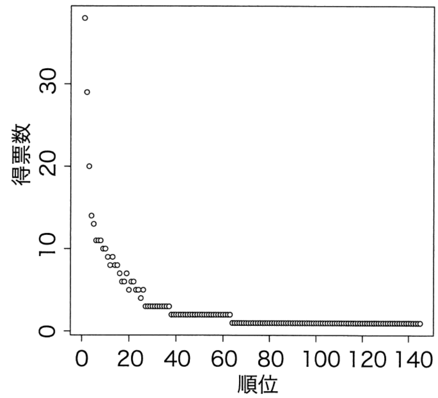


図 2　順位と得票数の関係.

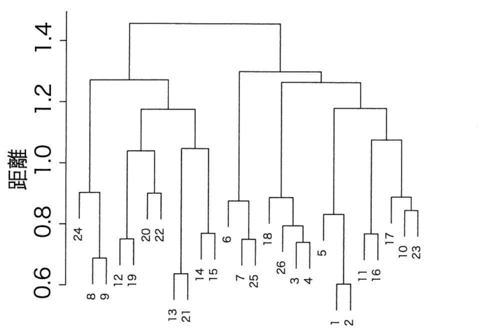


図 3　上位 26 作品の系統樹.

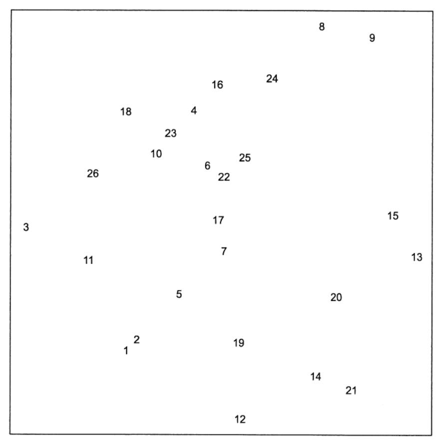


図 4　上位 26 作品の 2 次元地図.

まず，作品どうしの距離を定義する必要がある．2 つの作品に対する評価がどれだけ似ているかは，2 つの作品のどちらかに票を投じた達人の中で，両方共に票を入れた達人がどのくらいいるのかという比率で考えることにしよう．これは **Jaccard 係数**と呼ばれる**類似度**（similarity）と等価で，どちらの作品も全く同じ達人が投票していれば 1，全く異なれば 0 となる．距離とするためには 1 からこの値を引いた **Jaccard 距離**

$$d(i,j)=1-\frac{\text{作品 } i \text{ と } j \text{ 両方に投票した達人の数}}{\text{作品 } i \text{ または } j \text{ に投票した達人の数}} \tag{6}$$

を用いれば良い．

例として上位 26 作品（4 人以上の達人が投票した作品）を Jaccard 距離で評価し，Ward 法を使って階層的クラスタリングをした結果が図 3 である．また，計算方法の詳細は省くが，多次元尺度構成法[4]を用いると，この 26 作品の距離関係をできるだけ維持するように，2 次元平面に配置することができる．図 4 はこのようにして作成したもので，作品の距離関係を近似的に表現した地図と考えることができる．ただし，距離の与えられた 3 点は 2 次元空間に，4 点は 3 次元空間に，n 点は $n-1$ 次元空間に厳密には配置されるので，本来は 25 次元で表現すべきものをたった 2 次元で近似していることになる．実際，系統樹上で近いにも関わらず，地図上で離れて配置されている作品もあるので，あくまで近似的な表現であることに注意する．

さて，私は作品 6 が気に入ったので，図 3 から判断すると次に作品 7 と 25 を読んでみるのが良さそうである．

4. 不確かな距離の修正

次にこの方法を 145 作品全体に拡げて系統樹を描くとどのようになるだろうか？ 実際書いてみたのが図 5 で，2 次元地図を描いたのが図 6 である．

系統樹は一応それらしいものが描かれているが，地図のほうは平面の両端にデータ点が分かれてしまい，前節の 26 作品の場合と違って関係性が上手く分析で

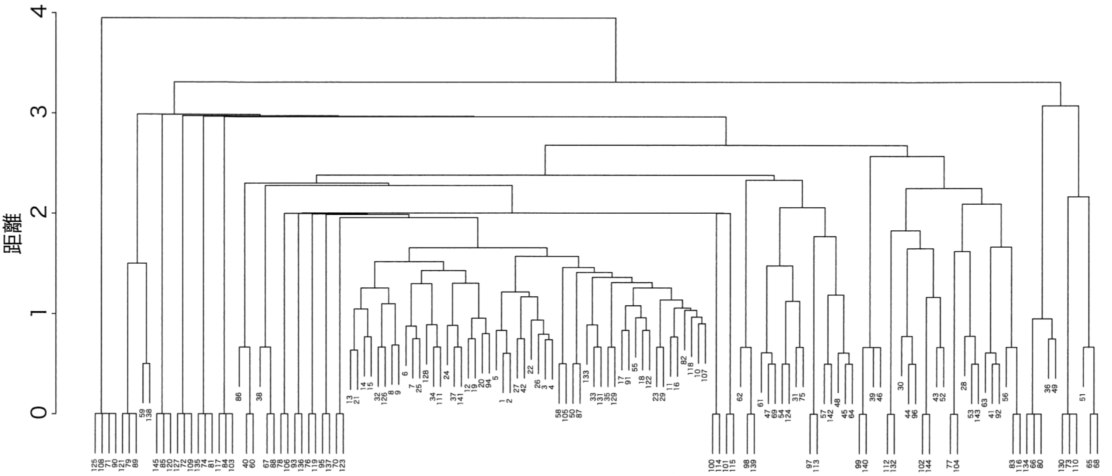


図5　全作品の系統樹.

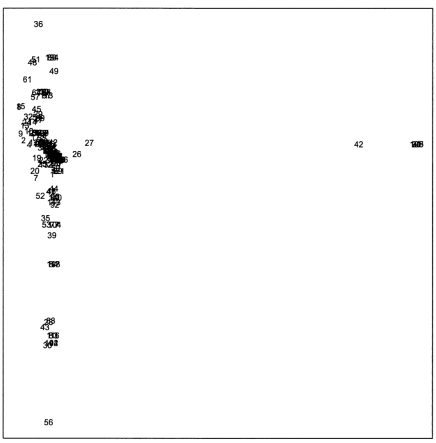


図6　全作品の2次元地図.

きていないことがわかる．これは主に少数の達人にしか評価されていない作品の距離の計算に問題があるためと考えられる．2つの作品の距離が1となるのは，評価した達人が全く異なるときで，多数の達人に評価された作品どうしでこうした事態になれば確かに距離は1として良いかもしれない．しかし少人数，特に1人にしか投票されていない作品どうしでは，評価した達人が異なれば距離は1，逆に同じであれば距離は0となり，両極端の値となってしまう．つまり少人数にしか評価されていない作品の距離は極めて不確かであることが予想される．もし6位まででではなく10位までアンケートを取っていれば，評価する人数も増え1や0といった極端な距離ではなくなるかもしれないが，我々が使うことのできるデータはこれしかないので致し方ない．

そこで，これらの不確かな距離を修正することを考えよう．例えば作品 i と j の距離が怪しいとする．一方 i と k の距離，k と j の距離は信頼できるなら，i と j の距離を

$$d(i,j) = d(i,k) + d(k,j) \qquad (7)$$

で再定義する．2つの作品を直接結ぶ作品がない場合には，さらにいくつかの作品を経由して2つを結び付けることを考える．また，いろいろな経路を取ることが可能な場合には，その中で最短の経路を選ぶことにする．これはisomap[6]という手法で採用された距離の修正方法で，近傍の信頼できる距離に基づいて全体の位相構造を推定する**多様体学習**という枠組みの中での考え方である．

どのデータ間の距離を修正すべきかは様々な観点からその合理性を検討すべきであるが，ここでは距離が1となってしまったところを最短経路を探索することで修正し，また1人だけに評価されて距離が0となっているところは距離を0.5に補正することにする．こうして描いた全作品に対する地図が図7で，系統樹が図8である．さきほどの不確かな距離による図とは大きく異なり，関係性が明確になっていることがわかる．この図から私へのお薦め作品としてさらに95と137が追加される．

5. おわりに

本稿では，分類問題の中でもラベルのないデータを扱うクラスタリング問題に焦点を当て，その基本的な

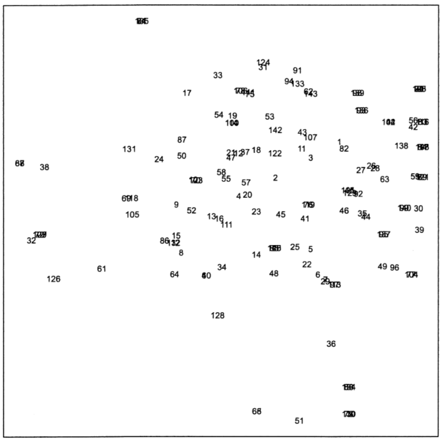


図 7　修正した距離による全作品の 2 次元地図.

考え方と，従来の統計ではあまり考慮されなかった距離の修正の問題を取り上げた．ここで用いた階層的クラスタリング手法は，グループ間の包含関係を含む詳細な関係性を調べ視覚化することができるため，少数データの分析に適している．一方，数万を超えるような大規模なデータのクラスタリングにおいては，非階層的手法である k-平均法などが好んで用いられる．ただし，階層的クラスタリングでは求められた系統樹に基づき自由にグループ数を変えながら分析を行うことができるが，非階層的クラスタリングでは事前にグループ数を与える必要がある．何らかの事前知識に基づいてグループ数を決めることができる状況は現実には稀なため，データから自動的にグループ数を決定する問題は現在でも活発に研究が行われている．例えば最近の話題としては，データ集合の単峰性を検定するための特殊な統計量[7]を利用してクラスタリング結果を評価しグループ数を決定する方法などが提案されている．

また，現実的な応用においては，教師あり・なし学習のどちらでもなく，一部のデータのみにラベルが与えられている両者の中間的な状況が存在する．例えばインターネット上の画像の多くは，そこに何が写っているのかを示す詳しい情報が与えられていないが，一部の画像には人物や物体の名称など明確なタグが付与されている場合がある．求める条件に合致した画像を探し出す画像検索の問題においては，タグの有無に関わらずすべての画像を用いて学習を行い，可能な限り精度を高める必要がある．このような混在データからグループ分けのルールを学習する問題は**半教師あり学習**[8]と呼ばれ，近年盛んに研究されている．

計算機とネットワーク環境の発展のため現在我々は未整理の大量データに取り囲まれ，分類問題はますますその重要性を増している．このため，大規模なデータを扱うための頑健で効率の良いアルゴリズムが求められており，比較的少数のデータを厳密に扱う従来の統計学とは違った視点からの研究も活発に進められている．昨今様々なレビュー論文があるが，先に挙げた文献 1, 2) は分野全体をわかりやすくまとめている．また距離の修正・再構成を含めてデータの距離構造を学習する問題を扱った文献として 9) を挙げておく．

参考文献

1) 神嶌敏弘,「データマイニング分野のクラスタリング手法 (1)—クラスタリングを使ってみよう！—」, 人工知能学会誌, **18(1)**, pp.59–65, 2003.
2) 神嶌敏弘,「データマイニング分野のクラスタリング手法 (2)—大規模データへの挑戦と次元の呪いの克服—」, 人工知能学会誌, **18(2)**, pp.170–176, 2003.
3) D. Arthur, S. Vassilvitskii, k-means++: the advantages of careful seeding, *Proc. 18th annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms*, pp.1027–1035, 2007.
4) 永田靖, 棟近雅彦,『多変量解析法入門』, サイエンス社, 2001.
5)『このミステリーがすごい！2013 年版』, 宝島社, 2012.
6) J.B. Tenenbaum, V. de Silva, J.C. Langford, A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction, *Science*, **290(5500)**, pp.2319–2323, 2000.
7) J.A. Hartigan, P.M. Hartigan, The Dip Test of Unimodality, *Annals of Statistics*, **13(1)**, pp.70–84, 1985.
8) O. Chapelle, B. Schölkopf, A. Zien, *Semi-Supervised Learning*, The MIT Press, 2006.
9) L. Yang, *Distance Metric Learning: A Comprehensive Survey*, Michigan State University, 2006.

（むらた・のぼる，早稲田大学理工学術院）

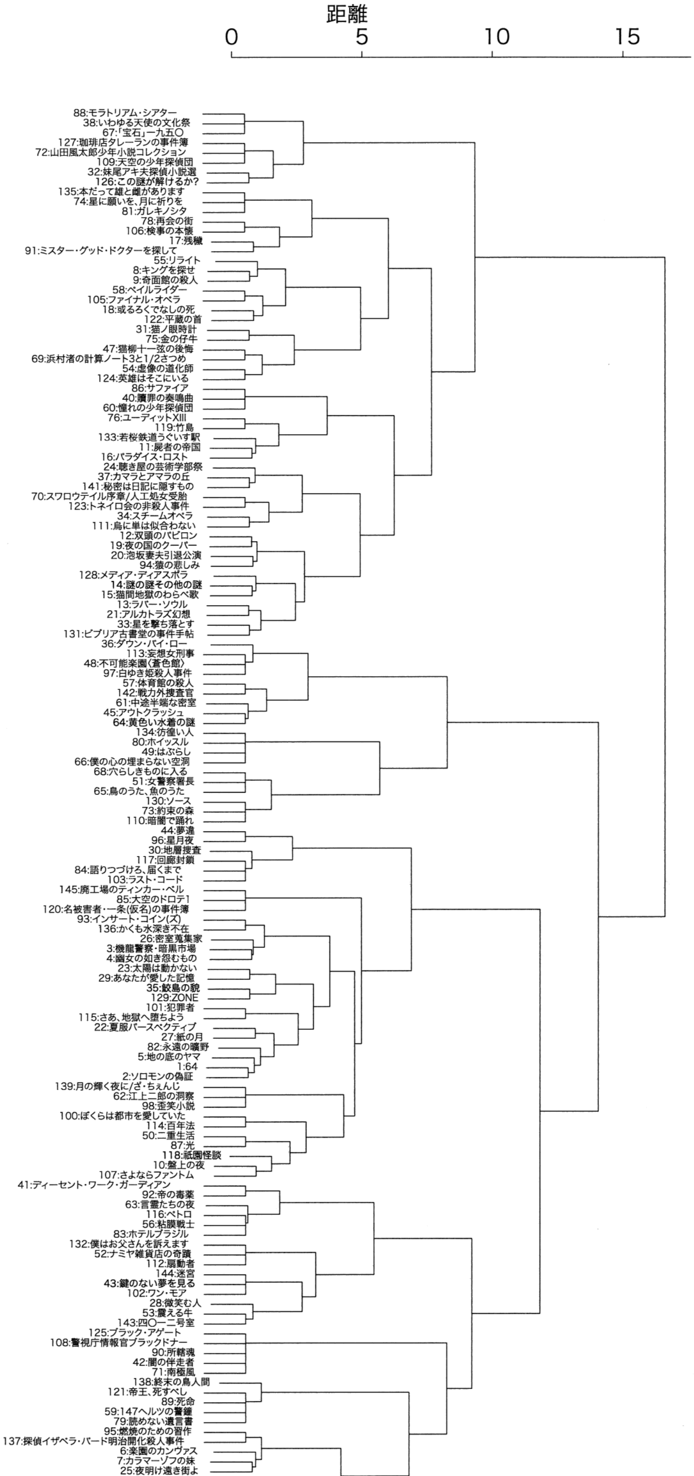
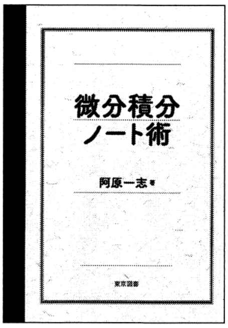


図 8　修正した距離による全作品の系統樹.

微分積分ノート術



阿原一志著，A5 判，200 頁，本体 2000 円，東京図書

ノートの取り方を実践的に指南する本

本誌でもおなじみのわかりやすい文章を書いてきた阿原さんの本である．期待にたがわず，かゆいところに手の届くようなノートであって，文句なしに皆さんにお勧めしたい 1 冊である．

本書の特色は，学生が授業のときに，ノートをどうとればよいのかという観点から書き進めてあることである．

最初のほうにある 3 つのポイントと「この本の使い方」9 項を読むだけでもこの本を買って備えておくだけの価値がある．

外見上目立つ点は手書きである．これは，「ノートをどうとるか」を，実際のノートで見せようという意図らしい．だが，証明と計算は手書きにしてあるが，定義や例題，問題もノートに取るはずなのに，それについては活字で，「中途半端」と思う方がいらっしゃるだろう．

しかし，この選択については，私は阿原さんを支持する．なぜなら，計算や証明などは少々わからなくとも，補えるが，定義や問題は曖昧な点があると，かなりの困難を生じるのだ．

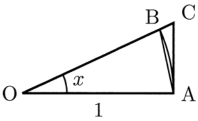
ところで，手書きには大きな利点がある．私も初期のマンガの本では手書きを重宝した．何よりあたりが柔らかで，読者の数学に対する拒否反応を抑えてくれるのである．

一方，気を配る必要もある．例えば，活字では間違えようもない文字も，手書きだと，判別が難しい場合が生ずる．$d, a, \alpha, 2$ がそうである．以前，自分の答案の b が途中から 6 になって間違った学生もいた．この本は，文字を大きくすることでそれをクリアしている．

しかし，文字を大きくすると切れ目が消えることもある (p.23 下から 5 行目の $x^{\alpha}\frac{\alpha}{x}$)．$x^{\alpha\alpha}$ などありえないが，初学者はそういうことで挫折する．

なお，本文に比較して節の終わりにある「杏乃さんのまとめ」は字間が開いていて大変読みやすかった．

さて，いくつか指摘しておきたいこともある．一つは，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の扱いである．



この証明は高校教科書では，上図の $\triangle$OAB $<$ 扇形 OAB $<$ $\triangle$OAC から示している．でも，実は，扇形の面積←円の面積← $\sqrt{1-x^2}$ の積分← $\sin x$ の積分← $\sin x$ の微分← $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の図式が成り立つ．これは，一種の循環論法である．高校の教科書では，直観的理解が優先するのでこれを使うことは認められている．しかし，大学生に向けて書いたものなら，「この証明は厳密ではありません」と一言ほしいところだろう．

もう一つは，双曲線関数がきわめて早い段階で出てくるが，このように早くから出すのだから，その意味するところを明確に述べてほしい．

また，指数・対数を 2 ページで簡潔にまとめているのに，三角関数の性質は既知として，公式を使っている．後のほうで三角関数の極限に関する計算をするときには加法定理などが出てくるのだから，指数・対数程度にはまとめておいていただければと思った．

細かい点では，①例題 1.10 では，問題の形が不明確．②逆三角関数のグラフで $\arctan x$ の x 軸の範囲はせめて $\pm\frac{\pi}{2}$ まではほしい．③例題 2.5 (3) の解答で $f(x)$ を定義せずに使っている．④例題 2.8 の答えは ∞ ではなく，振動であろう．

細かいこともいろいろ書いたが，これらのことを含めても，十分お勧めに値する良い本である．

岡部 恒治（埼玉大学名誉教授）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

牧島 一夫

1983年10月号

可視光と違いX線は屈折や反射を起こしにくいため，1962年に始まったX線天文学では，天体の位置決定に，光子の直進と吸収だけを使う機械式コリメータが多用された．なかでも，日本の宇宙X線研究の開祖である小田稔先生が考案された「すだれコリメータ」は大活躍した．これは金属製の2枚の「すだれ」が作る周期的な明暗の縞模様を用い天体の位置情報を得るもので，1983年10月号の拙文「天体のX線地図をつくる」では，その技術を紹介させていただいた．

30年前の記事は，「すだれコリメータ技術の最高峰は像合成で，解像度と感度を両立させる新しい概念として，フーリエ合成望遠鏡（FTT）が考えられる．次の太陽極大期（1991～92年）にはこの方法で，『ひのとり』の成果をしのぐ太陽フレアの高精度画像が得られるようになろう.」（一部省略もしくは改変）と結ばれている．FTTは私が考案した技術で，縞模様の間隔が異なる多数の「すだれ」を取り揃えることで，天体画像の様々な1次元フーリエ成分を取得し，その逆変換で1次元の画像を得る．装置全体を回転させることで，天体の2次元画像を得る，という考えである．



1991年に打ち上げられた宇宙科学研究所の太陽観測衛星「ようこう」は，硬X線望遠鏡（HXT）を装置の1つとして搭載し，世界で初めてFTTを用い，太陽フレアの硬X線撮像に挑戦した．衛星を回転できない事情のため，縞模様の間隔や方位角が異なる64組の「すだれ」を用いる方式を採り，私はその設計から調整まで担当した．衛星が無事に打ち上がった後も，フレアの画像が正しく合成できるか胃の痛む思いであったが，幸い多くの仲間の協力で，HXTはみごと撮像性能を発揮し，太陽フレアに伴い太陽磁気ループの頂上で粒子加速が起きるなど，重要な事実を明らかにした．

「ようこう」HXTがエネルギー50 keVを超える硬X線域で実現した，5秒角という驚異的な角分解能は，10年以上も世界記録であった．これは2002年に軌道に乗った米国の太陽観測衛星 *RHESSI* で破られたが，そこで用いられた技術も基本的にはFTTである．他方，最近はブラッグ反射などを用い，10 keV以上の硬X線でも反射集光が可能となり，建造中の日本の宇宙X線衛星 *ASTRO-H* ではこの「スーパーミラー」が使われている．FTT技術はひとまず役目を終えたように見えるが，フーリエ空間で動作するという装置のアイディアは，また違った文脈で復活するに違いない．

「ようこう」の成果を喜んで下さった恩師の小田先生は，2001年3月1日，78歳で永眠された．また「ようこう」の装置開発で苦楽を共にした戦友の小杉健郎博士も，後継機「ひので」衛星の成功からわずか2カ月後の2006年11月26日，57歳の若さで世を去った．この場を借りて，お二人の冥福を祈りたい．

（まきしま・かずお，東京大学大学院理学系研究科）

リレー連載

数学的な感覚の探求 第12回

思考法の源を探る

美しきものを見し人は

桂 利行

1. 数学の感覚とは

パスカルは著書『パンセ』の冒頭で「幾何学の精神」と「繊細の精神」の違いについて考察している．幾何学の精神とは数学思考のことであり，繊細の精神とは日常の生活思考のことである．「幾何学の精神においては，原理は手でさわれるように明らかであるが，しかし通常の使用からは離れている．したがって，そのほうへはあたまを向けにくい．慣れていないからである．」「繊細の精神においては，原理は通常使用されており，皆の目の前にある．あたまを向けるまでもないし，無理をする必要もない．ただ問題は，よい目を持つことであり，そのかわり，これこそはよくなければならない．というのは，このほうの原理はきわめて微妙であり，多数なので，何も見のがさないということがほとんど不可能なくらいだからである．ところで，原理を一つでも見落とせば，誤りにおちいる．」(中公文庫：前田陽一，由木康訳に基づく．)

数学の感覚は，ただ生きていれば身に付くというものではなく，意識して目を向けなければ育たないというのが厄介なところである．数学という学問は積み重ねという性格が強いので，1段目から2段目，2段目から3段目というように順に学んでいかなければ最先端の面白い部分に到達できない．どこかの段を抜かしたら，そのあとがわからなくなるからさらに厄介である．数学が面白いと思えなければ，各段を1つずつクリアしていく根気が続かないだろう．興味を持つということとわかるということが，織りなす綾となって相互作用する．数学がわかるようになるためには，まず好きになることである．数学が好きになってとことん考える．そうすれば，「数学がわかる」ということがどういうことかがわかって，数学の世界に溶け込めるようになる．こうして数学の感覚が育まれていく．ここで注意がいるのは，「数学がわかる」ということと「数学ができる」ということに微妙な差があることである．「数学ができた」からといって，必ずしも「数学がわかった」ことにはならない．数学の感覚は，数学がわかって初めて育つものである．

また，大学の教養教育までの数学と，それ以後の数学で，学習の仕方に大きなギャップがあるように思う．この点が，高校までは数学が得意であったのに数学科に入ってみて戸惑う人が多い原因のように思われる．高校あるいは大学の教養教育までの数学は，学ばねばならないことが限られており，その全部をあらゆる角度から完全に学んでから先に進む．いわば，そこはそう大きくない池で，全部埋めてから，つまりすべてを理解してから，

対岸に渡るということが可能な世界である．高校までの数学教育については，理由もわからずアルゴリズムだけを教えたり，公式を当てはめるだけの教育には批判が多い．このような教育では，数学ができる学生は作れても，数学がわかる人材は育たない．根本からわかるようにするというのが理想の教育のはずである．ところが，数学科での数学では，先に進めば進むほど大きな海のような世界が待ち構えている．太平洋を渡るのに海を埋め尽くしてから，つまりすべてを理解してから渡るというわけにはいかないのである．数学教室の図書室で膨大な数学の文献を眺めれば，どのぐらい知らないことがあるかがよくわかる．世界のどんなに優れた数学者でも現存する数学の 5 分の 1 を完全に理解している人はいないと思われる．大海を埋め尽くすわけにいかないからどうするかというと，海を渡るのに島を順に作ってそこを自分の得意領域として，島を伝って渡っていく．それが関の山であろう．島の周辺はいわば経済水域で，完全には理解していなくても，考えればわかる範囲である．その経済水域は，自分の掌の中にあって，感覚的にわかってしまう領域なのである．

数学の研究をする上で大事なのは，上記に述べた島に当たる，ここだけは誰にも負けない自分の得意技をもつことだと思われる．これは，スポーツにも共通していえることである．例えば，野球のピッチャーもこれといえる得意な球種がないとなかなかバッターを打ち取れないが，フォークボールが冴えて，誰にも負けないほど研ぎすまされたものであれば，その球種を使って打ち取れる確率が高い．ただし，1 つの得意技だけでは研究はできない．それだけでは世界が広がらないから新しい発想が生まれて来ない．小さな世界の住人となって大した結果が出るはずがない．かといって，何でもかんでも得意技にするほど人生には時間がない．だから，さらに数学の能力をのばすのに必要なことは，知ったかぶりではない上手な背伸びをすることであるように思う．数学の広い分野の風景を知り，感じをつかんでいるということが大きな力となる．完全に理解しているわけではないけれど，どういう理論なのかという感じを身に付けているということである．このあたりも，スポーツと似ている．得意のフォークボールを意識させて，それほど速くない速球や一流ではないカーブ，シュートの組合せで三振が取れてしまったりする．また，車の内部構造については大した知識がなくても車の運転の腕がよい人はたくさんいる．自動車が動く原理は意識しないで，メカを動かしているわけである．数学の中にも，メカとして動く理論はたくさんある．ホモロジーやコホモロジーの理論は様々あるが，それらは数学におけるメカの代表格である．車の運転でも，必要があればボンネットを開いて内部をチェックする必要があるように，これらの理論も定義に戻って内部をチェックする必要があることもたまにはあるが，基本的には上手に使えば便利だというメカである．場合によっては内部構造を知らなくても，確立されたメカを使わねばならないこともある．数学の基礎力を身に付けセンスを磨くのが目的の中等教育までの数学では，このようなメカの使用は好ましくないが，広大な数学の海で，限られた人生の時間内に成果を上げるための方策である．

このように数学の感覚を育むといっても一筋縄ではいかない．数学はあまりにも広大な世界であるから，数学がわかるといっても誰もが一様に完全にわかるというのではなく，人によってわかり方の模様が異なり，感覚の織りなす綾がある．感覚の綾が研究者ごとに異なるから，様々な人が様々なアイデアを出し，数学が多様に発展していくのであろう．

2. 理解のハードル

大学に入学して数学を学んでいく際にハードルとなる概念がいくつかある．大学に入ったらまずこれらを乗り越えなければ展望は開けない．

2.1 $\epsilon\delta$ 論法

大学の数学で最初につまずくのは，微分積分学に出てくる $\epsilon\delta$ 論法であろう．微分積分は高等学校で習っており，すでにわかっているのにどうしてわざわざ事態を複雑にするのかと思うのではな

いだろうか．この論法は，1つの関数の1点での状況を分析するだけならば，ほとんどの場合感覚的に処理できるから，それほど必要ではないが，関数列の無限の点での一斉の収束などを扱うには欠くことのできない概念である．

$\epsilon\delta$ 論法の典型は，関数の連続の定義に使われる．実軸上定義された関数 $f(x)$ があり，a を実軸上の点とすると，「任意に与えられた正数 ϵ に対し正数 δ が存在して，$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\epsilon$ が成り立つとき関数 $f(x)$ は点 $x=a$ で連続」というものである．ϵ と δ をとる順序に注意が必要で，この順序でとれば，δ を絞っていけば，関数 $f(x)$ の値が点 $x \longrightarrow a$ で $f(a)$ に近づいていく感じがにじみ出ている．これがすんなり理解できるというのは数学のセンスかもしれない．数列の収束の場合では，数列 $\{a_n\}$ が a に収束するということは，「任意に与えられた正数 ϵ に対して，自然数 N が存在し，$n>N$ ならば $|a_n-a|<\epsilon$ が成立する」ということである．これも，n が大きくなっていけば a_n がどんどん a に近づいている感じが汲み取れれば合格である．

関数列の一様収束を扱うと，この論法のありがたみがもっとわかる．区間 I で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ を考える．この関数列が関数 $f(x)$ に収束するというときは，I の各点 a において，任意に与えられた正数 ϵ に対し，$a\in I$ ごとに異なってもよい自然数 N があり，$n>N$ ならば $|f_n(a)-f(a)|<\epsilon$ が成り立てばよい．これは各点 a ごとに数列 $\{f_n(a)\}$ が $f(a)$ に収束しており，各点ごとには，先に見た数列の収束にほかならない．しかし，N は a ごとに異なる自然数をとってもよいので，収束の速度が各点ごとに異なるかもしれない．そこで $\epsilon\delta$ 論法が威力を発揮する．区間 I の各点で同じようなスピードで収束することをどう捉えるかという問題である．これを表すには，任意の正数 ϵ に対して，区間 I の点 a に関係しない自然数 N が存在し，$n>N$ ならば $|f_n(a)-f(a)|<\epsilon$ が成り立つ，とすればよい．区間 I の点 a に関係しない自然数 N をとっているので，同じ速度で収束していることになるのである．このような収束を一様収束という．連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束するとき，各点で収束するだけなら極限 $f(x)$ は連続になるとは限らない．しかし，一様に収束すれば極限 $f(x)$ は連続関数になるという大きな違いが出てくる．

碁の世界に，定石を覚えて2目弱くなり，という格言がある．定石を覚えると，それにこだわって，直後は弱くなる．しかし，本格的に強くなるためには，定石はマスターせねばならぬものであり，それを乗り越えるところから真の実力が身に付いていく．数学における $\epsilon\delta$ 論法も，そのような位置にある論法のように思える．

2.2 級数

$\{a_n\}$ を数列とするとき，無限和

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

を級数という．級数の考えにくさは無限と関係していることによるのであろう．頭の中で無限という捉えにくい量が抵抗感を生む．これをどう捉えるかというと，まず有限個の和

$$b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

を考える．それから，数列 $\{b_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} b_n$ を級数 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ の値とするのである．こうすれば，オイラーが見つけた

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

は，すべての項が正だから意味を理解しやすい．しかし，

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=\log_e 2$$

のような等式になると何となく気持ちが悪い．左辺の級数は右辺の値に収束するが，各項の絶対値の和

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

は収束しない．このような級数を条件収束級数という．条件収束級数の扱いには注意が必要で，級数の項の順序を適当に並べ変えると，どのような実数にでも収束するようにできるという結果（文

献 1) 参照) を見ると，背筋がぞっとする気持ちもよくわかる．

2.3 同値類別と商空間

集合をクラス分けするための概念が同値関係である．集合 S に関係 $\sim$ が与えられていて，$S \ni x, y$ に対し $x \sim y$ であるか，$x \sim y$ でないかのいずれかが成り立つとする．この関係が次の 3 条件をみたすとき同値関係という．

$S \ni x, y, z$ とする．

(i) $x \sim x$.

(ii) $x \sim y$ ならば $y \sim x$.

(iii) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$.

この関係はいわば友達関係である．曰く，(i) 自分と自分は友達である，(ii) 自分と相手が友達ならば，その相手と自分は友達である，(iii) 友達の友達はまた友達である．

同値関係があれば，友達関係にあるものを 1 つのグループにして，集合をクラス分けすることができる．逆に集合がクラス分けできていれば，それはある同値関係によるクラス分けになっていることがわかる．植物に学名をつけるのも植物の集合のクラス分けである．このように，クラス分けするというのは日常的に行っていることではあるが，数学でのクラス分けになると認識しにくいようである．商空間はクラス分けの一種であるが，集合を顕微鏡の精度を落として見ているような感覚であり，ここでつまずく学生が大勢いる．もとの集合に演算の構造が入っている場合，条件が整えばクラス分けしてもクラスの集合に演算が伝播し，クラスのメンバーが一糸乱れず団体行動している様がすんなり目に浮かぶというのは数学のセンスだといえよう．

2.4 抽象化――ベクトル空間，群，環，体

一般には抽象的な理論は受け入れにくいようである．普通のベクトル空間を抽象化すれば，実数軸上の実数値連続関数全体も実数体上のベクトル空間と見なせる．しかし，関数は関数であって，いくら眺めていても関数からベクトルの矢印は生えて来ない．抽象的なベクトル空間というものは，本来のベクトルの持つ本質的な性質だけを抜き出して抽象化し，ベクトル空間を公理的に定義したものである．したがって，その公理を満たすものは何でもベクトル空間とみなせ，抽象的なベクトル空間で成立する定理は，どんなベクトル空間でも成立する．つまり，普遍性が得られるという，ただそれだけのことである．それだけのことなのだが，理解しにくいのはよけいな知識が理解の邪魔をするのであろうか．よけいなことを考えないというのも数学の感覚のうちなのであろう．群，環，体の理論も，演算のある代数系の大事な性質だけを抜き出して抽象化したものだが，このような抽象的な論理展開をすんなり受け入れられるというのも数学をするのに必要なセンスであり，数学を真に理解するためには磨く必要のある感覚である．

2.5 ベクトルの 1 次独立

ベクトル空間の理論を教えていて，とくに理解してもらえないのが 1 次独立，1 次従属とそれに関連した概念である．実数体 $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間 V を考える．$V \ni \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbf{R}$ 上 1 次独立とは，1 次結合

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$

$(c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbf{R})$ が成り立てば，かならず $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ となることである．つまり，零ベクトルをベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合に表す表し方がただ 1 通りであり，

$$\mathbf{0} = 0 \times \boldsymbol{a}_1 + 0 \times \boldsymbol{a}_2 + \cdots + 0 \times \boldsymbol{a}_n$$

しかないということを言っている．これは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が “違う” 次元の方向を向いていて重複感がないということの数学的表現である．ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であり，V の任意の元 $\boldsymbol{x}$ がこれらの 1 次独立なベクトルの 1 次結合で

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

と表示されるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を V の基底という．このとき，$\boldsymbol{x}$ の表示の仕方は一意的であることがわかるから，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ はベクトル

$\boldsymbol{x}$ の座標としての役割を果たす．つまり，V の基底を1つとるということは，V に座標系を決めるということにほかならない．これらのことを実感としてわかるためには，数多く実例を調べてみることが必要であるが，そこから感覚がつかみ取れるかどうかが，数学的センスのあるないの分かれ目のような気がする．

2.6 同型の感覚

最後になったが，同じ物を同じと思える感覚というのは，数学をする上で重要な感覚である．例えば，ユークリッド幾何で，合同という概念がある．これは，2つの平面図形を平行移動，回転と裏返しで重ね合わせることができるとき，2つの図形を合同といい，ユークリッド幾何では同じ図形だとする．2つの三角形があるとして，色が違うとか，置いてある場所が違うとか，そんなことは問題ではなく，兎も角，平行移動，回転と裏返しで重ね合わされば同じなのである．この感覚が結構難しい．複雑な構造をもっていれば，同じものがなかなか同じに見えない．例えば，複素数体 $\mathbf{C}$ を考えよう．実数体 $\mathbf{R}$ と変数 x があるとき，1変数多項式環 $\mathbf{R}[x]$ をイデアル (x^2+1) で割った商環 $\mathbf{R}[x]/(x^2+1)$ は，よく知られているように，複素数体 $\mathbf{C}$ と自然に同型である．$\mathbf{C}$ と $\mathbf{R}[x]/(x^2+1)$ は見かけは全然違うけれど，同型という意味は，それぞれに入る和と積の代数構造が全く同じになるような対応がつくということである．したがって，体という代数構造を問題にする限り，どちらを使おうと全く変わりはない．このぐらいのレベルだとまだ認識することはそれほど難しくはないが，数学を研究していると，同じであることを見抜くことが至難の構造に出会うことがよくある．一見して同じだとは思えないものを同じだと見抜く力は，大変重要な数学の感覚である．

数学の問題を考える場合，解決の糸口を探して問題を解く．どこに目を付けるかで問題が易しく解けたり，なかなか解けなかったりする．着眼点も，数学のセンスに関係する．こんな小話がある．

昔，2人の愚者が馬に乗って旅をした．レストランで休憩しようとしたが，そのレストランには馬をつなぐ杭が1本しかなかった．2人は馬を繋いだが，その場を離れるとどちらの馬が自分のものかわからなくなるということで，思案した．アイデアを思いついた愚者が言った．「馬のしっぽの長さで区別したらよい．君の白い馬のしっぽは，僕の栗毛色の馬のしっぽより5cm長いから区別できる．」

数学においても，簡単な事実に全く気づかず，難しいことを考えて四苦八苦していることもきっとあるに違いない．

3. 数学は美しい

世界には飛び抜けて美しい美術品や遺跡がたくさんある．学生の頃に読んだ堀田善衛さんの『美（うるわ）しきものを見し人は』という美術の評論には，そのような逸品が数多く紹介されていて，感動した記憶がある[2]．数学にも様々な分野に，これらの美術品や遺跡に匹敵するような美しい世界が数多く存在する．

学部段階で習う数学の中にも，複素関数論におけるコーシーの積分定理や方程式論におけるガロアの理論など，初めて知ったときは，どうしてこんなに見事なことが成り立つのかとその美しさに驚いた．

美（うるわ）しきものを見し人は
はや死の手にぞ渡されつ
世のいそしみにかなわねば
されど死をみてふるうべし
美（うるわ）しきものを見し人は
（プラーテン作（生田春月訳）：
詩集「ヴェネチアのソネット」より「トリスタン」）

数学的な感覚というものは，結局はこのような美しさに触れ，触発され磨かれ，育まれていくものなのであろう．

参考文献

1) 高木貞治著『解析概論』改訂第三版，岩波書店，1983.
2) 堀田善衛著『美しきものを見し人は』，新潮社，1969.

（かつら・としゆき，法政大学理工学部）

数え上げと整数

知識と思考力の関係について

海老原 円・太田 雅人

9.1 小手調べ——思考力を問うということ

「数える」という行為は，人類が数学的な思考を獲得するに至る道程の出発点をなす．数えることから整数の概念が生ずる．例えばドイツ語で 'zahlen' といえば「数える」ことを意味し，'Zahl' は「整数」を意味する．

今回は，「数え上げ」と「整数」に関する問題を取り上げる．

ここで，単に「数える」といわず，「数え上げる」という言葉を用いる場合は，何らかの工夫をこらして，過不足なく，要領よく，見通しよく数える，という意味合いが込められている．そのような工夫こそ，数学的な思考の萌芽である．すなわち，数え上げと整数の問題は，数学の原点といっても過言ではない．

まず，小手調べとして，次の問題を取り上げよう．

> **問題 9.1** （東京大学大学院工学研究科システム量子工学専攻（当時），平成 19 年度）
> $mn - 3m - 2n = 0$ を満たす正の自然数 m, n の組をすべて求めよ．

解答例 与えられた関係式は $(m-2)(n-3) = 6$ と変形できる．したがって，$m-2$ と $n-3$ の値の組合せ $(m-2, n-3)$ は

$$(6,1),\ (3,2),\ (2,3),\ (1,6),\ (-6,-1),\ (-3,-2),\ (-2,-3),\ (-1,-6)$$

のいずれかである．m, n が正整数であることを考え合わせれば，これらの組合せは $(m,n) = (8,4), (5,5), (4,6), (3,9)$ の 4 通りであることが分かる． **解答終わり**

この問題は「論理的思考能力を見るための数理的問題」として出題されている．つまり，特に予備知識を必要とせず，その場で考えて解けるということであろう．たしかにこの問題は，特別な予備知識を必要としないが，一方において，類似する問題を過去に解いたことがあるかどうかということが，解答の成否や解答時間を大きく左右

するということもまた事実である．一般に，この種の問題は，特有のコツが必要であることが多い．そのようなコツを会得するためには，やはりある程度の経験が必要である．

次も同じところからの出題である．

問題 9.2 （東京大学大学院工学研究科システム量子工学専攻（当時），平成 19 年度）
ある長方形を n 本の直線でできるだけ多くの小片に分割する．その小片の数を求めよ．

解答例 n 本の直線によって分割される長方形の小片の個数の最大値を a_n とおく．1 本の直線によって長方形は 2 個の小片に分割されるので，$a_1 = 2$ である．k は自然数とし，k 本の直線によって長方形が a_k 個の小片に分割されているとする．ここに $(k+1)$ 本目の直線を引いたとき，さらに小片がどのくらい増えるかを考察する．$(k+1)$ 本目の直線は，それまでに引かれた k 本の直線と，長方形内で最大 k 個の交点を持つ．このとき，$(k+1)$ 本目の直線自体が，長方形の中で $(k+1)$ 本の線分に分割される．それらの線分の一つ一つが，その線分が貫く小片をさらに分割するので，線分の数だけ長方形の小片が増えることになる．つまり，長方形の小片は，最大で $(k+1)$ 個増えることになり，

$$a_{k+1} = a_k + k + 1 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

という漸化式が得られる．よって，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

である． **解答終わり**

この問題も，初見で解くのと，以前に解いたことがあって再びそれにあたるのとでは，やはり解答の成否や解答時間に大きく違いが出ると思われる．この問題は数え上げの問題としては有名なものの部類に属するので，受験生の中には，すでにこれを知っている者も相当数いるであろう．そう考えると，この問題が純粋に思考力を問う問題であるのか，それとも，以前にこの問題を見たことがあるかどうかという経験や知識を問う問題であるのか，実際のところは判然としない．

筆者は決してこの問題の意義を否定しているのではない．「思考力を問う」という行為がいかに難しいかということに思いを馳せているだけである．そもそも，思考力とは何か？ 我々が漠然と「思考力」と名づけるところの能力は，それまでの思考の経験の蓄積と強い相関関係がある．経験の蓄積によって後天的に獲得されたものを，広い意味で「知識」とよぶとすれば，「思考力」が「知識」と表裏一体をなしていることは疑いようがない．そうでなければ，「思考力のトレーニング」などという言葉は，それ自体，矛盾をはらんでいるということになってしまう．例えば数学オリンピックに出場する選手は，合宿などを通じてトレーニングを行い，大会に備える．それは，経験を積むことによって思考力を鍛えることができる，ということを我々が知っている——あるいは，うすうす感じているからにほかならない．

我々は，「考える力」と「知識」とを対極のものとしてとらえる二元論的な分析法を

こそ疑うべきかもしれない．「知識よりも考える力を大事にすべきだ」という，一見もっともらしい言説の裏に漂う微妙な欺瞞にこそ敏感になるべきかもしれない．

…話が横道にそれたようである．

9.2 数え上げの問題

数え上げの問題の典型例として，ここでは二項定理を取り上げる．

問題 9.3　(東京工業大学大学院理工学研究科有機・高分子物質専攻，平成20年度)

二項定理

$$(x+a)^n = x^n + {}_n\mathrm{C}_1\, ax^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2\, a^2x^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r\, a^r x^{n-r} + \cdots + a^n$$

に関して次の設問に答えよ．

(a)　$$\begin{aligned} f(x) &= (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) \\ &= x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_rx^{n-r} + \cdots + A_n \end{aligned}$$

の $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を求め，A_r はいくつの項を含むかを考えた後，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ として二項定理を証明せよ．

(b)　二項定理を用いて次の等式を証明せよ．

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots = 2^{n-1}$$

解答例　(a) 集合 B を $B = \{1, 2, \cdots, n\}$ と定め，B の部分集合 I に対して

$$a_I = \prod_{i \in I} a_i$$

と定めることにする．これは，I に属するすべての元 i にわたって a_i の積をとることを意味する．ただし，$a_\emptyset = 1$ と定める．このとき，

$$A_r = \sum_{\substack{I \subset B \\ \#(I)=r}} a_I$$

である．ここで，$\#(I)$ は，集合 I に属する元の個数を表すものとする．上の式のシグマ記号は，集合 B の部分集合 I であって，その元の個数が r であるものすべてにわたって a_I の和をとることを意味する．

実際，$\#(I) = r$ とするとき，$f(x)$ の展開にあたって，I に属する番号 i に対応する部分から a_i を選び，残りの部分から x を選んでかけ合わせれば a_Ix^{n-r} が得られ，それらを足し合わせたものが A_rx^{n-r} であることに注意すれば，上の式が成り立つことが分かる．

B の部分集合 I であって，その元の個数が r であるものは，全部で ${}_n\mathrm{C}_r$ 個存在する．なぜならば，そのような部分集合 I を選ぶことは，n 個の数字 $1, 2, \cdots, n$ から r 個を取り出すことにほかならないからである．したがって，A_r を $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の多項式とみた場合，${}_n\mathrm{C}_r$ 個の項を含むことになる．

ここで $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ とすれば，$\#(I) = r$ なる I に対して $a_I = a^r$ であるので，$A_r = {}_n\mathrm{C}_r a^r$ が得られる．したがって

$$(x+a)^n = x^n + {}_n\mathrm{C}_1\, ax^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2\, a^2x^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r\, a^r x^{n-r} + \cdots + a^n$$

が示される．

(b) $X = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots$, $Y = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots$ とおく．このとき，

$$X + Y = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

であるが，これは二項定理の式において $x = a = 1$ とおいたものにほかならない．したがって

$$X + Y = (1+1)^n = 2^n \tag{9.1}$$

が得られる．また

$$X - Y = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$$

であるが，これは二項定理の式において $x = 1, a = -1$ とおいたものにほかならない．したがって

$$X - Y = (1-1)^n = 0 \tag{9.2}$$

が得られる．式 (9.1) および式 (9.2) より $X = Y = 2^{n-1}$ がしたがう． **解答終わり**

二項定理は数え上げの問題としては非常に基本的な問題であり，すでに高等学校で学んでいるものである．それでもなお，このような問題を大学院の入試問題として出題することには一定の意義があると思われる．

この問題は，基本的ではあるものの，いざ解答を書こうとするとなかなか書きづらいと感じる受験者も多かろう．解答例の中にあるような記号の使い方は，数学を専門とする者にとっては慣れ親しんだものである．しかし，そうでない者にとっては，理工系の学生といえども，なじみが薄いのではなかろうか．

「数え上げる」ということは，ある集合の元の個数を何らかの方法で調べることであるので，その過程を記述しようと思えば，集合や写像といった概念を駆使するのがやはり便利である．そのような概念に不慣れな者が，自分なりの言葉を用いて，しかも採点者に分かるような客観性をその言葉に持たせようとすれば，かなり工夫を凝らさなくてはなるまい．数学を専攻としない大学院の入試問題にこのような問題が出題されるとすれば，出題者は受験者のそういう工夫を見ようとしている，と想像できる．

言語を操ることは思考の基盤をなす．書くことは考えることである．書かれたものを読めば，それを書いた者の思考が手に取るように分かる．思考力を測りたければ，受験者に記述させればよい（もっとも，採点は難しいであろう．例えば受験者の思考が混沌としている場合，答案の文章もまた混沌として理解しがたいものになっている可能性が大いにある）．

受験者の立場に立ってみると，このような問題に対処するための特別な方策というものはないのであるが，ただ，普段から自分の力でしっかり考えて数学を学ぶようにしていただきたい．できれば，数学に「感動」していただきたい．程度の差こそあれ，苦しい思考の末に感動をもって理解した事柄は，強く印象に残り，生きた知識として定着する．知識と思考力は対立するものではない．感動とともに得た知識は，思考力

の貴重な糧である．

…また話が横道にそれたようである．

9.3 整数に関する問題

次に整数に関する問題を取り上げる．

ここでも，どのような知識を前提とするかが問題になる．大学の理工系の学部における数学のカリキュラムは，例えば線形代数や微積分の基礎などについては，ある程度共通のものが存在するが，整数に関していえば，そのような共通の基盤はないように思われる．したがって，整数に関する問題を出題する場合，どの程度の予備知識を受験生の常識として仮定するか，悩ましいことになる．

問題 9.4　(名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻，平成 20 年度)

(1)　0 でない整数 m, m', n, n' が

$$mm' + nn' = 1$$

を満たすとき，任意の整数 a, b に対して，次の連立合同式

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m}, \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

を満たす整数 x は法 mn の下で $ann' + bmm'$ と合同であることを証明せよ．

(2)　素数 p に対して，$x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ を満たす整数 x を法 p の下ですべて求めよ．

(3)　互いに異なる素数 p, q に対して，整数 p', q' が $pp' + qq' = 1$ を満たすとき，$x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ を満たす x を法 pq の下ですべて求めよ．

解答例　(1) $x \equiv a \pmod{m}$ より $x - a$ は m の倍数である．よって，$nn'(x-a) = nn'x - nn'a$ は mnn' の倍数であり，特に mn の倍数であるので，

$$nn'x \equiv ann' \pmod{mn} \tag{9.3}$$

が成り立つ．また，$x \equiv b \pmod{n}$ より $x - b$ は n の倍数である．よって，$mm'(x-b) = mm'x - mm'b$ は $mm'n$ の倍数であり，特に mn の倍数であるので，

$$mm'x \equiv bmm' \pmod{mn} \tag{9.4}$$

が成り立つ．式 (9.3) と式 (9.4) を辺々加え，$mm' + nn' = 1$ を用いれば

$$x \equiv ann' + bmm' \pmod{mn}$$

が成り立つことが分かる．

逆に $x \equiv ann' + bmm' \pmod{mn}$ であるとすると，ある整数 k が存在して

$$x = ann' + bmm' + kmn \tag{9.5}$$

が成り立つ．このとき，$nn' = 1 - mm'$ を式 (9.5) に代入すれば

$$x = a - amm' + bmm' + kmn = a + m(-am' + bm' + kn)$$

となるので

$$x \equiv a \pmod{m}$$

が成り立つ．また，$mm' = 1 - nn'$ を式 (9.5) に代入すれば

$$x = ann' + b - bnn' + kmn = b + n(an' - bn' + km)$$

となるので

$$x \equiv b \pmod{n}$$

が成り立つ．

(2) $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ とすると，$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ は p の倍数である．p が素数であることより，$x-1, x+1$ のどちらかが p の倍数であることが分かる．よって，$x \equiv 1 \pmod{p}$ または $x \equiv -1 \pmod{p}$ が成り立つ．

逆に，素数 p に対して，$x \equiv 1 \pmod{p}$ または $x \equiv -1 \pmod{p}$ が成り立つとき，$x-1$ または $x+1$ が p の倍数であることより，$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ は p の倍数となり，$x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ が成り立つ．

したがって，求める x は

$$x \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{または} \quad x \equiv -1 \pmod{p}$$

を満たすものである．

(3) p, q を素数とし，$pp' + qq' = 1$ が成り立つとき，小問 (1) の結果より，合同式

$$x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$$

は，連立合同式

$$x^2 \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{かつ} \quad x^2 \equiv 1 \pmod{q}$$

と同値である．実際，小問 (1) において，$m = p$, $m' = p'$, $n = q$, $n' = q'$, $a = 1$, $b = 1$ とおき，x の代わりに x^2 を考えれば，連立合同式

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{p} \\ x^2 \equiv 1 \pmod{q} \end{cases}$$

と，合同式

$$x^2 \equiv 1 \cdot qq' + 1 \cdot pp' \,(=1\,) \pmod{pq}$$

とは同値であることが分かる．

ここで，小問 (2) の結果より，$x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ を満たす x は

$$x \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{または} \quad x \equiv -1 \pmod{p}$$

を満たす．同様に，$x^2 \equiv 1 \pmod{q}$ を満たす x は

$$x \equiv 1 \pmod{q} \quad \text{または} \quad x \equiv -1 \pmod{q}$$

を満たす．

ここで，4つの場合に分けて考える．

(i)　$x \equiv 1 \pmod{p}$ かつ $x \equiv 1 \pmod{q}$ のとき，再び小問 (1) の結果を用いれば

$$x \equiv pp' + qq' \,(=1) \pmod{pq}$$

が得られる．

(ii)　$x \equiv 1 \pmod{p}$ かつ $x \equiv -1 \pmod{q}$ のとき，小問 (1) の結果より

$$x \equiv -pp' + qq' \pmod{pq}$$

となる．

(iii)　$x \equiv -1 \pmod{p}$ かつ $x \equiv 1 \pmod{q}$ のとき，小問 (1) の結果より

$$x \equiv pp' - qq' \pmod{pq}$$

となる．

(iv)　$x \equiv -1 \pmod{p}$ かつ $x \equiv -1 \pmod{q}$ のとき，小問 (1) の結果より

$$x \equiv -pp' - qq' \,(=-1) \pmod{pq}$$

となる．

以上のことをまとめれば

$$x \equiv \pm pp' \pm qq' \pmod{pq}$$

（複号は任意）が得られたことになる．

逆に，$x \equiv pp' + qq' \,(=1) \pmod{pq}$ ならば，$x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ となり，$x \equiv -pp' - qq' \,(=-1) \pmod{pq}$ ならば，$x^2 \equiv (-1)^2 \,(=1) \pmod{pq}$ となる．また，$x \equiv pp' - qq' \pmod{pq}$ または $x \equiv -pp' + qq' \pmod{pq}$ のときは

$$x^2 \equiv (pp' - qq')^2 \pmod{pq}$$

となるが，右辺は

$$(pp' - qq')^2 = (pp' + qq')^2 - 4pp'qq' = 1 - 4pp'qq' \equiv 1 \pmod{pq}$$

を満たすので，やはり $x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ が得られる．

したがって，$x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ を満たす x は

$$x \equiv \pm pp' \pm qq' \pmod{pq}$$

（複号は任意）を満たすものである．　　　　**解答終わり**

初等整数論を題材とした出題であるが，予備知識がほとんどなくても解答できるように誘導がつけられている．とはいうものの，もちろん，合同式や素数について，ある程度の知識は必要である．くわしくは，例えば高木貞治著『初等整数論講義』（共立出版）[1]や遠山啓著『初等整数論』（日本評論社）[2]などを参照していただきたいが，以下に，それらに関する基本的な事柄をまとめておく．

m は自然数とし，a, b は整数とする．$a-b$ が m の倍数であるとき，**a と b は m を法として合同である**といい，

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す．この式を**合同式**とよぶ．

合同式については，次の命題が成り立つ．この命題は上の解答例の中でも特に断りなく用いている．

命題　m は自然数とする．整数 a, a', b, b' は $a \equiv a' \pmod{m}$ かつ $b \equiv b' \pmod{m}$ を満たすと仮定する．このとき，次が成り立つ．

(1)　$a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$.
(2)　$a - b \equiv a' - b' \pmod{m}$.
(3)　$ab \equiv a'b' \pmod{m}$.

素数についてはあらためて説明の必要もあるまいが，上の解答例で用いたのは次の基本的な命題である．

命題　p は素数とし，a, b は整数とする．ab が p の倍数ならば，a または b の少なくともどちらか一方は p の倍数である．

また，次の命題も問題 9.4 と深い関連がある．

命題　a, b は整数とし，d は a と b の最大公約数とする．このとき，ある整数 x, y が存在して

$$d = xa + yb$$

が成り立つ．

最後に述べた命題は，初等整数論の中でも非常に重要なものであるので，受験生としては知っておいたほうがよいと思われる．一方，出題者の側に立つと，これを受験者の予備知識として仮定してよいかどうかは微妙なところである（問題 9.4 は，この命題との関連を意図的に断ち切って作られている）．

9.4 終わりに

今回は数え上げと整数の問題を取り扱ったが，知識と思考力の関係についても大いに考えさせられた．

次回は第 2 回，第 4 回に続き，再び微積分の問題を取り扱う．

参考文献

1)　高木貞治，『初等整数論講義　第 2 版』，共立出版，1971 年．
2)　遠山啓，『初等整数論』，日本評論社，1972 年．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

信号処理の情報幾何 (2)

独立成分分析からスパース解析と非負行列分解へ

甘利 俊一

信号処理の多くの問題は，知りたい信号 $\boldsymbol{s}$ の線形結合 $\boldsymbol{x}$ を雑音下で観測して，元の信号 $\boldsymbol{s}$ を復元する．すなわち，$\boldsymbol{x}$ を多数観測して線形関係

$$\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_t,\ t = 1, 2, 3, \cdots \tag{25.1}$$

を $\boldsymbol{s}(t)$ について解けばよい．この単純な問題にも，いろいろな仕組みがあった．A は未知であり，$\boldsymbol{x}$ を無相関な成分 $\boldsymbol{s}$ に分解する主成分分析，独立な成分に分解する独立成分分析を前回に述べた．今回はまず，$\boldsymbol{s}$ の成分は非負であることを想定する非負行列分解を述べる．次に，信号 $\boldsymbol{s}$ がスパースであることを想定して，$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{s}$ を復元するスパース解析の情報幾何を述べよう．スパースとは，$\boldsymbol{s}$ の成分の多くは 0 であり，有効なもの（0 でない成分）の数はごく少ないという仮定である．$\boldsymbol{x}$ を生成する仕組は $\boldsymbol{x} = \sum s_i \boldsymbol{a}_i$ である．ここで，$\boldsymbol{x}$ を生成する要因 s_i は多数あるが，実際の $\boldsymbol{x}$ は各回ごとに少数の要因のみから生成される（要因の組合せは各回ごとに違ってよい）と想定する．これがスパース解析である．

25.1 非負行列分解

独立成分分析は，関係式 $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{s}$ で，$\boldsymbol{s}$ の各成分が独立と言う仮定の下で多数の観測から行列 A を推定するものであった．A が分かれば同時に $\boldsymbol{s}$ も復元できる．しかし，独立でない場合もある．画像信号では画素ごとの信号は独立ではない．一方，画素の明るさは非負である．$\boldsymbol{s}$ の成分が非負であるとすると，これは A を知るための大きな手掛かりになる[1,2]．成分が非負の信号 $\boldsymbol{s}$ は空間の第一象限上に分布している．これはコーン（錐）をなす．このコーンを行列 A で変換しても，それはやはりコーンをなす（図 25.1）．だから，多数の $\boldsymbol{x}$ を

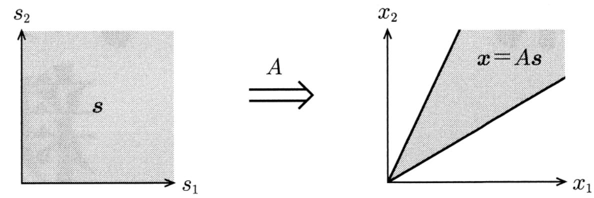


図 25.1　$\boldsymbol{s}$ の第一象限は A で $\boldsymbol{x}$ のコーンに写像される．

観測すれば，それらは一つのコーン上にある．このコーンを決定すれば，ここから行列 A がわかる．これが非負行列分解である．

ここで，多数の測定をまとめて行列の形で書いて $X = [\boldsymbol{x}(1) \cdots \boldsymbol{x}(T)]$，また，$\boldsymbol{s}$ のほうも $S = [\boldsymbol{s}(1) \cdots \boldsymbol{s}(T)]$ という行列にしておこう．すると，

$$X = AS \tag{25.2}$$

となる．ここで，A も要素が非負の行列とすれば，X の要素も非負である．

非負の行列 X が与えられたときに，これを 2 つの非負行列 A, S の積に分解することを非負行列分解という．まず，2 つの行列 X と AS の違いを行列のダイバージェンス $D[A : B]$ で計ることにする．このとき，損失関数 $L(A, S)$ を

$$L(A, S) = D[X : AS] \tag{25.3}$$

とおく．ダイバージェンスとしては，Frobenius ノルムと呼ばれる，2 乗和

$$D[A, B] = \frac{1}{2} \sum_{i,t} |a_{it} - b_{it}|^2 \tag{25.4}$$

を使ってもよいし，KL ダイバージェンス

$$D_{KL}[A, B] = \sum_{i,t} \left\{ a_{it} \log \frac{a_{it}}{b_{it}} - a_{it} - b_{it} \right\} \tag{25.5}$$

を使ってもよい．a_{it}, b_{it} はそれぞれ行列 A, B の要素である．もっと一般的に α ダイバージェンス，β ダイバージェンスなどを使うのも良いが，細かい話は省く．

2 変数 A, S の関数である $L(A, S)$ を最小化するのに，交互最小化を用いる．すなわち，ステップ t で候補 $\left(A^{(t)}, S^{(t)}\right)$ が与えられたときに，まず $A^{(t)}$ を固定して $L\left(A^{(t)}, S^{(t)}\right)$ を前よりも減少させる S を求め，これを $S^{(t+1)}$ とする．次は，この $S^{(t+1)}$ を使って，$L\left(A^{(t)}, S^{(t+1)}\right)$ を減少させる A を求め，これを $A^{(t+1)}$ と置く．これで計算が一巡し次のステップでの $\left(A^{(t+1)}, S^{(t+1)}\right)$ が求まる．L が減少する方向を求めるには勾配法を使えばよい．しかし，勾配法では非負という制約が入らないので，途中で候補の A や S が負になると困る．そこで，A, S ともに要素が非負であるという制約を考えて，η を定数として指数型勾配法という次の更新式を考える．

$$S^{(t+1)} = S^{(t)} \exp\left\{-\eta \frac{\partial L}{\partial S}\right\}, \quad A^{(t+1)} = A^{(t)} \exp\left\{-\eta \frac{\partial L}{\partial A}\right\}. \tag{25.6}$$

これを対数で書けば

$$\log S_{it}^{(t+1)} = \log S_{it}^{(t)} - \eta \frac{\partial L}{\partial S_{it}}, \quad \log A_{it}^{(t+1)} = \log A_{it}^{(t)} - \eta \frac{\partial L}{\partial A_{it}} \tag{25.7}$$

となるから，$\log S$ と $\log A$ に勾配法を用いたことになる．Frobenius ノルムの場合，L の勾配は

$$\frac{\partial L}{\partial A_{it}} = \left[-XS^T + ASS^T\right]_{it}, \quad \frac{\partial L}{\partial S_{it}} = \left[-A^T X + A^T AS\right]_{it} \tag{25.8}$$

である．そこで，いっそのことすべてを対数にして

$$\log A_{it}^{(t+1)} = \log A_{it}^{(t)} + \log\left(XS^T\right)_{it} - \log\left(ASS^T\right)_{it}, \tag{25.9}$$

$$\log S_{it}^{(t+1)} = \log S_{it}^{(t)} + \log\left(A^T X\right)_{it} - \log\left(A^T AS\right)_{it} \tag{25.10}$$

とすることもある．これは，Lee と Seung のアルゴリズムである[2)]．同種のアルゴリズムが，種々のダイバージェンスを用いて書かれ，いろいろな更新式が考えられているが，それについては専門の書物を参照されたい[1)]．

25.2 圧縮測定（compressed sensing）

スパースであることは分かっているが，どの成分が 0 かは分からない信号 $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{x}$ から復元しよう．情報幾何を使うために，信号 $\boldsymbol{s}$ をこれからは $\boldsymbol{\theta}$ と記す．これがアファイン平坦座標となるからである．線形関係 $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{\theta}$ で，$\boldsymbol{x}$ が m 次元，$\boldsymbol{\theta}$ が n 次元であるとし，$m \times n$ 次の係数行列 A は各成分がランダムに作られているとしよう．また，m, n が十分に大きい漸近的な状況を想定する．信号 $\boldsymbol{\theta}$ は n 次元のベクトルであるが，このうち 0 でない値を持つ成分は k 個以内に限られ，残りの成分はみな 0 であるとしよう．このとき $\boldsymbol{\theta}$ は k-スパースであるという．しかし，どの成分が 0 でどれが 0 でないかはわからないし，それは $\boldsymbol{\theta}(t)$ のうちで t ごとに違っていて良い．こうした状況で，$\boldsymbol{x}$ の次元（測定数）m がどのくらいなら，信号 $\boldsymbol{\theta}$ をほとんどの場合ほぼ正しく復元できるのだろう．もとより，$m = n$ ならば，行列を逆転すればよく，スパースであってもなくてもこれで十分である．スパースの場合に驚くべき結果が分かってきた．次の事実が知られていて，これにかかわる多くの理論がある．

命題 25.1　m と n が大きいとき，$\boldsymbol{\theta}$ が k-スパースで，$\boldsymbol{x}$ の次元（測定数）が

$$m > 2k \log n \tag{25.11}$$

ならば，$\boldsymbol{\theta}$ をほぼ正しく復元できる．

スパース状況における解析は，統計学，画像復元，独立成分分析，脳における視覚情報の表現など，多くの分野から出てきた問題である[3~6)]．そして，n ではなくて $\log n$ に比例する程度の測定で $\boldsymbol{\theta}$ が復元できるという結果は驚くべきものであり，研究が白熱化している．ここでは，圧縮測定そのものについてはこれ以上触れない．多くの解説を参照されたい[3~5)]．そのかわり，スパース解を

求めるアルゴリズムについて，情報幾何の立場から考える．

25.3 線形回帰問題のスパース解

一番単純な，ガウス雑音下での線形回帰問題を考える．A を既知として，観測値 $\boldsymbol{x}$ をもとに誤差の二乗和

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\sum |\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{\theta}|^2 \tag{25.12}$$

を最小にする最小二乗解は，ガウス雑音のもとでの (25.1) の最尤推定と同じである．目的関数は $\boldsymbol{\theta}$ の 2 次関数で，$G = A^TA$ と置けば，c を $\boldsymbol{\theta}$ に関係しない定数として

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T G\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{\theta} + c \tag{25.13}$$

と書ける．$m > n$ ならば G は正則で，(25.13) を $\boldsymbol{\theta}$ で微分して 0 と置き，

$$\boldsymbol{\theta}^* = G^{-1}A^T\boldsymbol{x} \tag{25.14}$$

が解である．$m < n$ のときは，G は特異になる．このときは $\psi(\boldsymbol{s})$ を最小にする解は多数あり，$\boldsymbol{n}$ を $G\boldsymbol{n} = 0$ を満たす G の零ベクトルとすれば，一つの解を $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ とすると，$\bar{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{n}$ も解である．したがって解の集合は線形部分空間をなす．古典的にはこの場合，多数ある解のうちで二乗ノルム $|\boldsymbol{\theta}|^2$ を最小にする解を使うことが多かった．これは一般逆行列 $A^\dagger = A^T\left(AA^T\right)^{-1}$ を用いて

$$\boldsymbol{\theta}^* = A^\dagger\boldsymbol{x} \tag{25.15}$$

と書ける．しかし，この解はスパースにはほど遠い．

最もスパースな解は，許される $\boldsymbol{\theta}$ のうちで，0 でない成分の数が最小のもの，すなわち $\boldsymbol{\theta}$ の 0-ノルム（$\boldsymbol{\theta}$ のうち 0 でない成分の数）$L_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_i \left|\theta^i\right|^0$ が最小のものである．しかし，この解を求めるには組合せ問題を解かなければならず，n, m が大きいときには計算論的に無理である．そこで，1-ノルム $L_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_i \left|\theta^i\right|$ を最小にするもので代用ができないかという考えが出てきた．これを解くと，多くの問題で最もスパースな解が求まる．そこで，どのような条件のもとで，1-スパース解は 0-スパース解と一致するかが研究された．その結果が圧縮測定であり，$m \approx 2k\log n$ 程度でうまくいくことが示された．

25.4 1-ノルム制約条件のもとでの凸関数の最小化

線形回帰問題を拡大し，一般の凸関数である目的関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ を制約条件

$$L = \sum\left|\theta^i\right| = c \tag{25.16}$$

のもとで最小化することを考える[5,6)]．後でわかるように，制約条件の c が十分に大きければ，何も制約しないことと同じであり，c を小さくするにつれて制

約がきつくなり，$c=0$ に至れば解は $\boldsymbol{\theta}=0$ になる．c を小さくするにつれ，解がどんどんスパースになっていく様子を見よう．この制約条件付き最小化は，Lagrange の未定係数法を用いて，

$$\psi(\boldsymbol{\theta})+\lambda L(\boldsymbol{\theta}) \tag{25.17}$$

を最小化する問題として定式化できる．また，$\psi(\boldsymbol{\theta})$ は 2 次関数である必要はなく，一般の凸関数でよい．スパース制約のもとでの凸関数の最小化問題の情報幾何は広瀬と駒木が導入した[6]．

話を分かりやすくするため，過決定といわれる $m>n$ の場合から話を始める[6]．制約条件がなければ，この場合 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ は一意に決まり，それを $\boldsymbol{\theta}^*$ と書けば $\nabla\varphi(\boldsymbol{\theta}^*)=0$ を満たす．

ここで情報幾何を導入する．凸関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ が定義された空間には，双対平坦な構造が入る．そのアファイン座標系は $\boldsymbol{\theta}$ 自身であり，双対アファイン座標はその Legendre 変換

$$\boldsymbol{\eta}=\nabla\psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{25.18}$$

である．また，リーマン計量は $\boldsymbol{\theta}$ 座標で $G(\boldsymbol{\theta})=\nabla\nabla\psi(\boldsymbol{\theta})$，$\boldsymbol{\eta}$ 座標ではその逆行列 G^{-1} になる．2 つのアファイン座標系は双対直交で，ここにピタゴラスの定理と射影定理が成立した．

凸関数から導かれる双対ダイバージェンスは，2 点 $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}'$ の間では

$$D\left[\boldsymbol{\theta}:\boldsymbol{\theta}'\right]=\psi(\boldsymbol{\theta})-\psi\left(\boldsymbol{\theta}'\right)-\nabla\psi\left(\boldsymbol{\theta}'\right)\cdot\left(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}'\right) \tag{25.19}$$

のように書ける．だから，点 $\boldsymbol{\theta}$ から最適点 $\boldsymbol{\theta}^*$ へのダイバージェンスは，$\nabla\psi\left(\boldsymbol{\theta}^*\right)=0$ であることを考えれば，

$$D\left[\boldsymbol{\theta}:\boldsymbol{\theta}^*\right]=\psi(\boldsymbol{\theta})-\text{const.} \tag{25.20}$$

のように書ける．$\psi(\boldsymbol{\theta})$ を最小にすることは，$\boldsymbol{\theta}$ から $\boldsymbol{\theta}^*$ ダイバージェンスを最小にすることと同じで，双対性より，これは $\boldsymbol{\theta}^*$ から $\boldsymbol{\theta}$ への双対ダイバージェンスを最小にすることである．制約条件の定める $\boldsymbol{\theta}$ の領域

$$B_c=\left\{\boldsymbol{\theta}\,\middle|\,\sum\left|\theta^i\right|=c\right\} \tag{25.21}$$

は $\boldsymbol{\theta}$ 座標で凸であることに注目しよう．射影定理から，次が導ける（図 25.2）．

定理 25.1 制約 B_c 上で $\psi(\boldsymbol{\theta})$ を最小にする解 $\boldsymbol{\theta}_c^*$ は，$\boldsymbol{\theta}^*$ から B_c への双対射影で与えられ，これは一意的に決まる．

25.5 解の解析的な表現

Lagrange 型の表現を用い，(25.17) を微分して 0 と置けば，B_c 上での最適解 $\boldsymbol{\theta}_c^*$ が満たすべき方程式

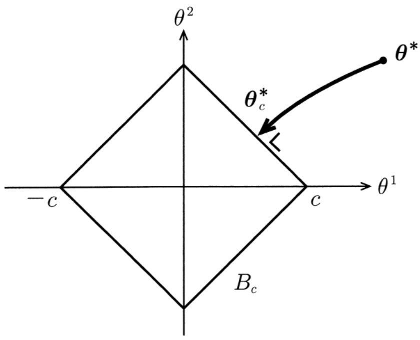


図 25.2　$\boldsymbol{\theta}^*$ を B_c へ双対射影する．

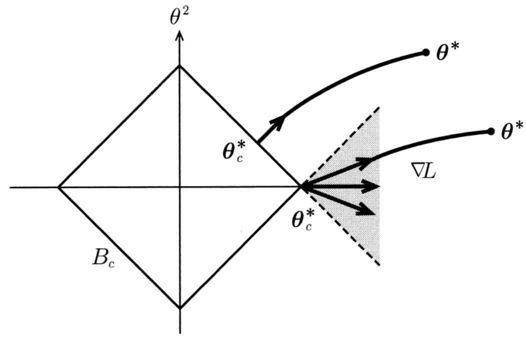


図 25.3　B_c の劣勾配 ∇L と解軌道．

$$\nabla\psi\left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right) = -\lambda\nabla L\left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right) \tag{25.22}$$

が得られる．これが $\boldsymbol{\theta}^*$ の B_c への双対射影である．凸胞 B_c は多面体であるから，(25.16) で定まる L は $\theta^i=0$ となるような成分を含む $\boldsymbol{\theta}$ では微分可能でない．このような場所は，B_c の低次の境界（頂点，エッジ，など；超平面にならない境界）である．一般に B_c が微分可能なときに，その微分 ∇L は B_c の接平面の法線ベクトル（反変表現）である．微分不可能な低次境界においては，ここで凸胞の支持超平面を考え（これは多数ある），その法線を劣勾配と呼ぶ（図 25.3）．劣勾配は多数あるから，その全体を劣微分と呼んで ∂L で表す．(25.22) の ∇L はこの意味でよく，双対射影では $\nabla\psi\left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right)$ が劣勾配の一つになることを示している．

劣勾配を具体的に計算しよう．そのため，$\boldsymbol{\theta}$ が 0 となる成分と 0 でない成分を分けて考える．$\boldsymbol{\theta}$ の活添字集合 $A(\boldsymbol{\theta})$ とは，$A(\boldsymbol{\theta})=\left\{i \,\middle|\, \theta^i\neq 0\right\}$ のことである（以下，$(\boldsymbol{\theta})$ は略す）．活添字集合の補集合を $\bar{A}$ と書こう．このとき，L の劣微分を成分で書くと，

$$(\nabla L)_i = \begin{cases} \partial_i L(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{sgn}\theta^i, & i\in A, \\ \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i\in[-1,1], & i\in\bar{A} \end{cases} \tag{25.23}$$

である．ε_i は $[-1,1]$ の範囲で任意の値をとってよい．

25.6 逆射影とスパース解

ここで c を一つ固定して，B_c 上の一点 $\boldsymbol{\theta}$ を考える．$\boldsymbol{\theta}'$ を B_c に双対射影すると $\boldsymbol{\theta}$ に写るとき（B_c の外側だけを考える），$\boldsymbol{\theta}'$ を $\boldsymbol{\theta}$ の双対逆写像といい，その全体を

$$\prod\nolimits_c^{-1}\boldsymbol{\theta} = \left\{\boldsymbol{\theta}' \,\middle|\, \prod\nolimits_c\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\theta}\right\} \tag{25.24}$$

と書く．ただし，$\prod_c\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\theta}$ は，$\boldsymbol{\theta}'$ を B_c に双対射影すると $\boldsymbol{\theta}\in B_c$ であることを示し，$\prod_c^{-1}$ はその逆写像である．$\boldsymbol{\theta}^*$ が $\prod_c^{-1}\boldsymbol{\theta}$ に入っていれば，(25.16) の c で制約されているときの最適解はこの $\boldsymbol{\theta}$ に他ならない．$\boldsymbol{\theta}$ の活添字集合

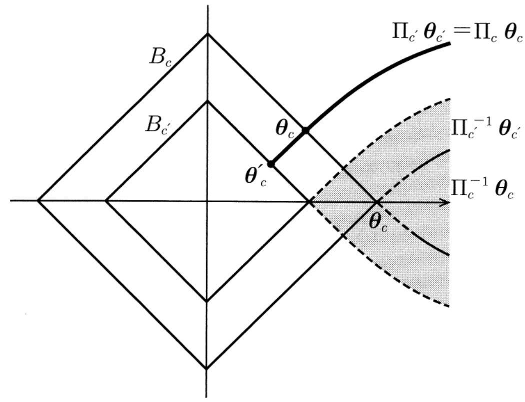


図 25.4　逆射影 $\prod_{c'}^{-1}\boldsymbol{\theta}_{c'} \supset \prod_c^{-1}\boldsymbol{\theta}_c$.

A の補集合 $\bar{A}$ が空集合であるとき，すなわち $\boldsymbol{\theta}$ が B_c の超平面上にあるとき，$\prod_c^{-1}\boldsymbol{\theta}$ は $\boldsymbol{\theta}$ を出発し，B_c に直交する方向へ出ていく双対測地線である (図 25.4)．$\boldsymbol{\theta}$ の活添字集合の補集合 $\bar{A}$ が空集合でないときは，$\prod_c^{-1}\boldsymbol{\theta}$ は $\boldsymbol{\theta}$ を出発し，接線が劣法線と一致する双対測地線の全体であり，これは双対測地線の張るコーンをなす (図 25.4)．

ここで 2 つの $c > c'$ を考えよう．いま，$B_{c'}$ 上で活添字集合が A である点を $\boldsymbol{\theta}'$ とする．これに対応して，B_c の点 $\boldsymbol{\theta}$ が同じ活添字集合 A を持ち，しかもこれが $\prod_{c'}^{-1}\boldsymbol{\theta}'$ に入っているとする．このとき，次の包含定理が成立する．

包含定理　$c' < c$ で，$\prod_{c'}^{-1}\boldsymbol{\theta}'$ が同じ活添字集合 A を持つ点 $\boldsymbol{\theta} \in B_c$ を含むとき，$\prod_c^{-1}\boldsymbol{\theta}$ は $\prod_{c'}^{-1}\boldsymbol{\theta}'$ を双対平行移動したものである．一般に，$\prod_{c'}^{-1}\boldsymbol{\theta}' \supset \prod_c^{-1}\boldsymbol{\theta}$.

この定理は，スパース解の仕組みを解きほぐす．すなわち，図 25.4 からもわかるように，$\prod_{c'}^{-1}\boldsymbol{\theta}'$ は B_c 上でこれよりも大きな活添字集合を持った点を含む．したがって，c を小さくしていくにつれて，B_c への射影により A は単調に減り，解はよりスパースになっていく．

この事実は，石川真澄が発見し，ニューラルネットで枝の重みの学習による推定で，1-ノルムによる罰金を付けた解法を提唱した[14]．これは Bayes の立場では，ラプラス分布を事前分布として仮定することに等しい．

25.7 解軌道の解析

最適解 $\boldsymbol{\theta}_c^*$ を c の関数と見よう．同じことだが，これを λ の関数 $\boldsymbol{\theta}_\lambda^*$ と見ることもできる．これを解軌道と呼ぶ．このとき，$\lambda = \lambda(c)$ は c により一意に決まり，c の単調減少関数であるから，どちらで考えてもよい．最適解の方程式 (25.22) は

$$\boldsymbol{\eta}_c^* = -\lambda \nabla L\left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right) \tag{25.25}$$

と書け，これを c で微分すると，$\dot{}$ を c による微分として

$$G\left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right)\dot{\boldsymbol{\theta}}_c^* = -\dot{\lambda}_c \nabla L\left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right) \tag{25.26}$$

となる．これは最適解の軌道 $\boldsymbol{\theta}_c^*$ の方向 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_c^*$ を示す微分方程式である．ここで ∇L を調べれば，$i \in A$ のとき

$$(\nabla L)_i = \mathrm{sgn}\left(\theta_c^{*i}\right) = s^i \tag{25.27}$$

が成立する．c の減少につれて，$\boldsymbol{\theta}_c^*$ の活添字集合 A が変わらない間は (25.26) が成立しているが，A が変わるところでは $L(\boldsymbol{\theta})$ の微分が行えず，方程式 (25.26) は使えない．A が変わるとき，解軌道 $\boldsymbol{\theta}_c^*$ の方向は不連続に変わる．しかし，解軌道そのものは連続につながり，$\boldsymbol{\theta}^*$ と 0 とを結ぶ．

まず A が変わらない範囲で解軌道 $\boldsymbol{\theta}_c^*$ がどうなっているか考えよう．解軌道を $\boldsymbol{\theta}$ 座標と $\boldsymbol{\eta}$ 座標とで表し，その成分が A に属するか $\bar{A}$ に属するかで分けて

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{\theta}^A, \boldsymbol{\theta}^{\bar{A}}\right) \tag{25.28}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\boldsymbol{\eta}^A, \boldsymbol{\eta}^{\bar{A}}\right) \tag{25.29}$$

のように書く．すると次の補題を得る．

補題　解軌道は

$$\boldsymbol{\eta}_c^{*A} = -\lambda(c)\boldsymbol{s}^A, \quad \boldsymbol{\theta}_\lambda^{*\bar{A}} = 0 \tag{25.30}$$

を満たす．ただし，$\boldsymbol{s}^A$ は $\mathrm{sgn}\left(\theta_c^{*i}\right)$ を成分とする符号ベクトル $(i \in A)$ である．

ここから，次の等角定理が得られる．

最小等角度定理　活添字集合 A の範囲で，解軌道の方向 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_\lambda^*$ は A に属するすべての活添字の $\boldsymbol{\theta}$ 座標軸 $\boldsymbol{e}_i$, $i \in A$ と等角度で，$\bar{A}$ に属する添字の座標軸との角度より小さい．

証明　$\dot{\boldsymbol{\theta}}_\lambda^*$ と θ^i 座標軸 $\boldsymbol{e}_i$ のなす角度は

$$\langle \dot{\boldsymbol{\theta}}_\lambda^*, \boldsymbol{e}_i \rangle = \dot{\boldsymbol{\eta}}_\lambda^* \cdot \boldsymbol{e}_i = \dot{\eta}_{\lambda,i}^* \tag{25.31}$$

である．一方，$\dot{\boldsymbol{\eta}}_\lambda^*$ は $\nabla L\left(\boldsymbol{\theta}_c^*\right)$ に比例する．しかるに，A に属する活添字 i については $|s_i| = |\nabla L|_i = 1$ で，i が $\bar{A}$ に属するときは $|\nabla L|_i \in [-1, 1]$ であるから，$|\nabla L|_i \leq 1$ である．上式で $|\nabla L_i| = 1$ になるのは，i が活添字に変わるときであるから，

$$\left|\langle \dot{\boldsymbol{\theta}}_\lambda^*, \boldsymbol{e}_i \rangle\right| < \left|\langle \dot{\boldsymbol{\theta}}_\lambda^*, \boldsymbol{e}_j \rangle\right|, \quad i \in A, \quad j \in \bar{A}. \tag{25.32}$$

25.8 Minkowski 勾配

原点から出発して $\boldsymbol{\theta}^*$ に至る軌道 $\boldsymbol{\theta}_c^*$ が，もしある関数 $f(\boldsymbol{\theta})$ に対して

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_c = -\nabla f\left(\boldsymbol{\theta}_c\right) \tag{25.33}$$

を満たしていれば，これは勾配流である．我々の解軌道は Minkowski 幾何での勾配流であることを示す．

関数 $f(\boldsymbol{\theta})$ に対してこの関数の最も急な変化方向は，リーマン空間では自然勾配 $\tilde{\nabla} f = G^{-1}\nabla f$ で与えられることは良く知られている．ユークリッド空間で正規直交座標を取れば，$G = I$ であるから，最急変化方向は単に ∇f で良い．点 $\boldsymbol{\theta}$ とその近くの点 $\boldsymbol{\theta} + \varepsilon \boldsymbol{a}$ を考えたときに，最も急な方向 $\boldsymbol{a}$ は，$\boldsymbol{a}$ の大きさは一定という条件のもとで

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arg\min f\left(\boldsymbol{s} + \varepsilon \boldsymbol{a}\right) \tag{25.34}$$

で与えられる．Minkowski 空間で，$\boldsymbol{a}$ の大きさがノルム $\|\boldsymbol{a}\|$ で与えられたとする．ここで L_q ノルム $(q > 1)$

$$\|\boldsymbol{a}\|_p = \sum |a_i|^q \tag{25.35}$$

を考えよう．すると，関数 f の最急変化方向は c を定数として

$$a_i = c\partial_i f(\boldsymbol{\theta})|^{\frac{1}{q-1}} \operatorname{sgn}\left\{\partial_i f(\boldsymbol{\theta})\right\} \tag{25.36}$$

と書ける．われわれは，1-ノルムに関心がある．そこで，q を 1 に近づける極限を考える．このとき，大きさを規定する係数 c を，$c^{-1} = \max\left\{|\partial_i f|\right\}$ となるように選んで $q \to 1$ の極限を取れば，$f(\boldsymbol{\theta})$ の 1-ノルムに基づく勾配

$$a_i = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left\{\partial_i f(\boldsymbol{\theta})\right\}, & |\partial_i f| = \max\left\{|\partial_1 f|, \cdots, |\partial_n f|\right\}, \\ 0, & |\partial_i f| \text{ が最大でないとき} \end{cases} \tag{25.37}$$

が得られる．これを $\boldsymbol{a} = \nabla_M f(\boldsymbol{\theta})$ と書き，1-ノルム Minkowski 勾配と呼ぶ．この特徴は，微係数の絶対値が最大なもの以外の成分を 0 とすることである．

原点から出発して，関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ の最急変化方向へ向かう Minkowski 最急降下法

$$\boldsymbol{\theta}^{t+1} = \boldsymbol{\theta}^t - \varepsilon \nabla_M \psi\left(\boldsymbol{\theta}^t\right) \tag{25.38}$$

を考えよう．この特徴は，$\nabla_M \psi$ からわかるように，$\psi(\boldsymbol{\theta})$ の微係数 $|\eta_i|$ が一番大きな成分だけを選んで，$\boldsymbol{\eta}$ のこの添字の成分だけを変えていく．$\boldsymbol{\theta}$ で言えば (25.26) からわかるように，すべての成分が変わる．しかし，$\langle \boldsymbol{e}_i, \Delta\boldsymbol{\theta}\rangle$ の角度は，$i \in A$ ならばすべて等しく，$i \in \bar{A}$ ならば角度はこれより大きい．活添字集合を $A = \{i_1^*, \cdots, i_k^*\}$ とする．$\boldsymbol{\theta}$ を変えていくと，各微係数 η_i が変わり，あるところでもう一つの添字 j^* に関する微係数の大きさがこれまでの最大のものと同じになる．すなわち，$|\eta_{j^*}| = \left|\eta_{i_1^*}\right| = \cdots = \left|\eta_{i_k^*}\right|$ となる．このとき，Minkowski 勾配は，新しい j^* を活添字集合に入れ，対応する $\boldsymbol{\theta}$ の成分を同時に増やすことになる．ここで活添字集合が $A = \{i_1^*, \cdots, i_k^*, j^*\}$ に増える．これをさらに繰り返し，活添字集合を一つずつ増やしていく．

これは線形回帰問題で ψ が 2 次関数の場合に Efron らが提唱した LARS

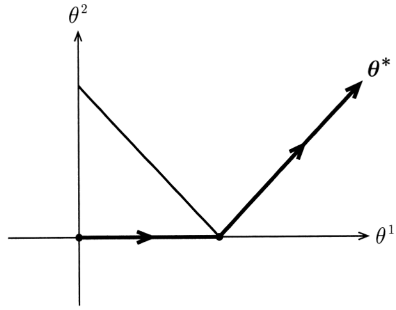


図 25.5　拡張 LARS と Minkowski 勾配流.

(Least Angle Regression) に他ならない (図 25.5). すなわち, Minkowski 勾配流が活添字集合の各座標軸に対して角度が等しく最小になっている. Efron らの場合は, 目的関数 $\psi(\boldsymbol{s})$ が 2 次式で基礎となる空間がユークリッド空間であるため, $\boldsymbol{\eta}$ 測地線は $\boldsymbol{\theta}$ 測地線に他ならず, 一つの活添字集合 A 内での $\boldsymbol{\theta}$ の変化を逐次的にではなくて, 次の活添字集合が出るまで一挙に増やすことができた. このため, 効率の良いアルゴリズムが使える. 一般の凸関数の場合は, 微小なステップで刻まなければならない. このとき, アルゴリズムは

$$\boldsymbol{\eta}^{(t+1),A} = \boldsymbol{\eta}^{(t),A} + \mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{\theta}^{(t),A}\right)\Delta t, \tag{25.39}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{(t+1),\bar{A}} = \boldsymbol{\eta}^{(t),\bar{A}} + G_{\bar{A}A}G_{AA}^{-1}\mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{\theta}^{(t),A}\right)\Delta t \tag{25.40}$$

のようになる. 計算法に種々の工夫が必要かもしれない.

これまで, 過決定 (overdetermined) の場合を扱ってきた. 圧縮観測 (compressed sensing) に対応する観測数が小さい under-determined の場合は, $\psi(\boldsymbol{\theta})$ は厳密な凸関数ではなくて, 広義の凸であり, $\nabla\psi(\boldsymbol{\theta}) = 0$ を満たす解 $\boldsymbol{\theta}^*$ は一意に決まらず, 部分空間をなす. その中で 1-ノルムの最小のものを探したい. この場合, G は正定値ではなく半正定値であるからリーマン計量が存在しない. $\boldsymbol{\theta}$ から $\boldsymbol{\eta}$ への変換 (25.18) は存在するが, 逆変換は一意ではない. しかし, この場合でも, Lagrange 表現による最適解が満たす方程式 (25.22) はそのまま成立し, これを c で微分し, 解軌道を求める方程式を出せば, それは (25.25) と同じである. したがって最小等角度定理が成立する. このため, Minkowski 勾配法 (25.38) または (25.39), (25.40) はそのまま使える. 途中の説明で $\boldsymbol{\theta}^*$ を用いたのは便宜上であり, 実は必要ない.

終わりの一言

今回は非負行列分解とスパース解析を取り上げた. 非負行列分解は, 画像, パワースペクトラムなど, 本質的に非負値であるデータを分解するのに適している. ここでは, 独立性などを仮定することなく, 変換の行列が A が求まる. 一方, スパース解析は応用範囲の広い新しい技術である. これまでは不良設定の逆問題を解くのに, 一般逆行列などが使われていた. しかし, 多くの問題で

は，真の解はスパースかもしれない．そうでなくともスパースという制約を入れることで解が安定する．解をスパースにすることで，画像などの雑音除去を行うことも有効である[9]．

ここでは制約として L_1 を課して，スパース解を求めた．しかし $L_{1/2}$ などの制約の方が良い解が求まるという報告がある[10,11]．これは非凸問題となり，種々の面白い現象が見られるが，ここではふれない．

参考文献

1) A. Cichocki, R. Zdunek, A.H. Phan and S. Amari, *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations*, John Wiley, 2009.
2) D.D. Lee and S. Seung, Algorithms for nonnegative matrix factorization, *Nature*, **401**, 788–791, 1999.
3) A. Bruckstein, D. Donoho, and M. Elad, From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images, *SIAM Review*, **51**, 34–81, 2009.
4) S.S. Chen, D.L. Donoho, and M.A. Saunders, Atomic decomposition by basis pursuit, *SIAM J. Sci. Comput.*, **vol.20**, pp.33–61, 1998.
5) R. Tibshirani, Regression shrinkage and selection via the lasso, *J. Royal Statistical Society, Series B*, **58**, pp.267–288, 1996.
6) Y. Hirose and F. Komaki, An extension of least angle regression based on the information geometry of dually flat spaces, *J. Computational and Graphical Statistics*, **19**, pp.1007–1023, 2010.
7) M. Liu, BC. Vemuri, S. Amari and F. Nielsen, Shape retrieval using hierarchical total Bregman soft clustering, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **XXX**, 2012.
8) B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, and R. Tibshirani, Least angle regression, *Annals of Statistics*, **32**, pp.407–499, 2004.
9) A. Hyvarinen, Sparse code shrinkage: Denoising of non-Gaussian data by maximum likelihood estimation, *Neural Computation*, **11**, 1739–1768, 1999.
10) M. Yukawa and S. Amari, l_p-constrained least squares ($0 < p < 1$) and its critical path, IEEE ISIT-2012.
11) Z. Xu, X. Chang, F. Xu, and H. Zhang, $L1/2$ regularization: A thresholding representation theory and a fast solver, *IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems*, **23**, pp.1013–1027, 2012.
12) M. Elad, Sparse and Redundant Representations: *From Theory to Applications in Signal and Image Processing*, Springer, 2010.
13) Y. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed Sensing*, Cambridge University Press, 2012.
14) M. Ishikawa, Structural learning with forgetting, *Neural Networks*, **9**, 509–521, 1996.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

特　集（2013年11月号予告）

理論物理と実験物理の交錯

刺激しあい発展する姿に迫る

本体952円

特　集（2013年9月号）

ボーア

量子力学の開拓，原子模型から百年

本体952円

編集後記

学問を分類するとそれぞれの性格が出て大変面白いです．今回の特集は学生の方には自分が何に向いているのかというヒントにもなったのではないでしょうか．

私も分類を通して見えてくる学問の姿をあらためて知ることができました．（R）

*　　　*

効率的に何かを進めようとすると自然に分類分けをしていることがあります．暮れの大掃除では，取捨の分類から始めます．実際には，分類に迷った結果，却って非効率的となってしまいますが…（T）

数　理　科　学　10月号

2013年10月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁